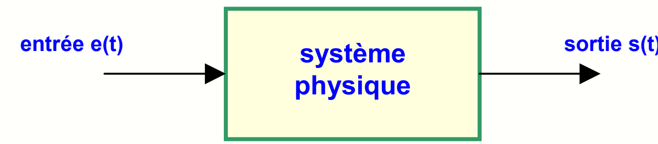
Réponse d'un système linéaire

Sommaire

1- Les systèmes linéaires

Un système physique électronique ou électromécanique est linéaire si e(t) et s(t) sont liés par une équation différentielle linéaire.

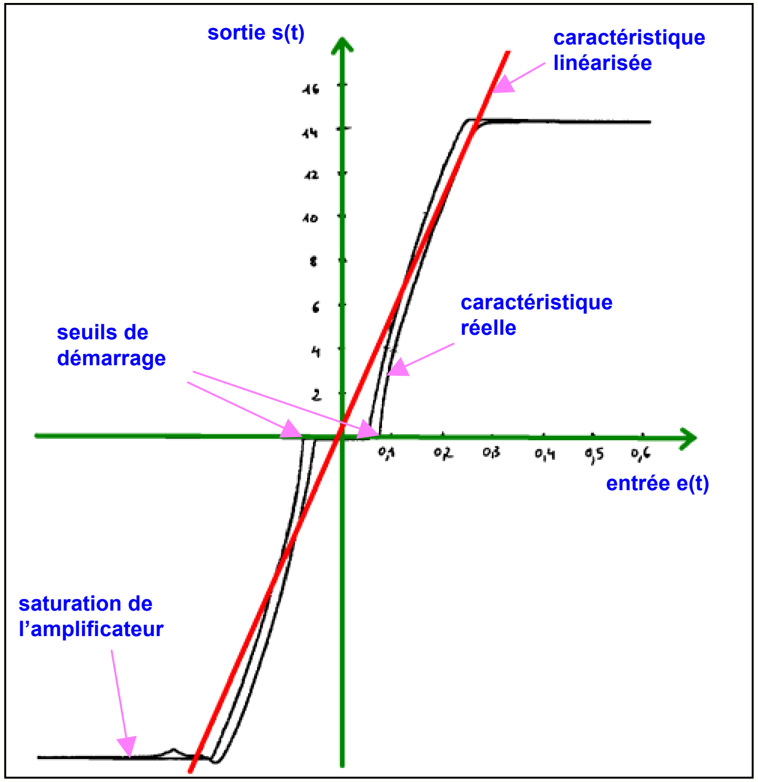


- il ne présente aucune non-linéarité comme la saturation des amplificateurs
- les moteurs n'ont pas de seuil de démarrage, et le système ne contient ni trigger, ni relais
- l'étude mathématique d'un dispositif linéaire est plus simple que celle d'un système réel
- on commence donc toujours, si c'est possible, par négliger les non-linéarités
- la régulation de chauffage « tout ou rien » est un exemple de système non-linéaire impossible à linéariser

Exemple : groupe ampli+moteur+génératrice tachymétrique

Linéariser ce système revient à négliger :

- la saturation si e(t) dépasse 0,2V
- les frottements qui empêchent le moteur de tourner si e(t) < 0,7V
- l'hystérésis qui dédouble la caractéristique

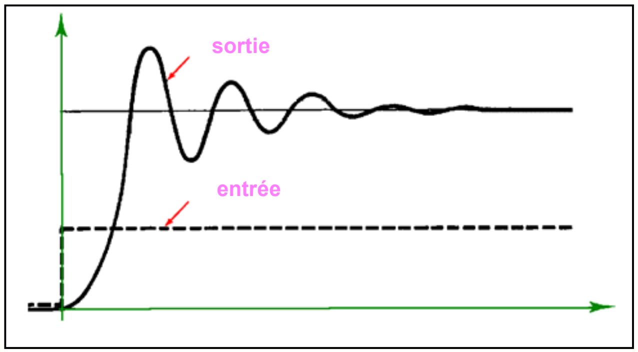


Applet : simulation de quelques systèmes linéaires

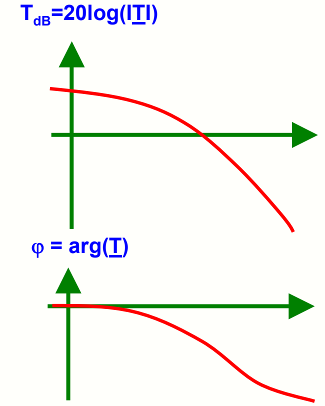
2- Caractérisation d'un système

Il y a plusieurs façon des caractériser un système physique linéaire dans le but de prévoir sa réponse à une entrée donnée :

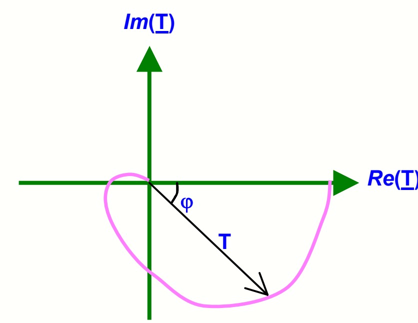
- par sa réponse à un signal de forme simple (impulsion, échelon, rampe …)



- par son diagramme de Bode qui donne le module et l'argument de la transmittance



- par son diagramme de Nyquist qui décrit la transmittance complexe



- par l'équation différentielle linéaire reliant e(t) et s(t) qui permet de trouver la réponse s(t) pour une entrée e(t) quelconque

$$s(t) = 2.e(t) + 10e'(t) + 3s'(t) + 12s''(t)$$

- par sa transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$ qui relie l'entrée et la sortie en régime sinusoïdal

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{2+10j\omega}{1-3j\omega+12\omega^2}$$

- par sa transmittance de Laplace T(p) qui lie les transformées de Laplace de l'entrée E(p) et de la sortie S(p)

$$T(p)=\frac{2+10p}{1-3p-12p^2}$$

3- Pôles et zéros d'une transmittance

Le numérateur et le dénominateur de la transmittance de Laplace peuvent se factoriser et T(p) peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\boxed{T(p) = K\frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_n)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_m)}}$$

degré n

degré m = ordre du système

- les n racines z_i du numérateur sont réelles ou complexes conjuguées et s'appellent des zéros
- les m racines p_j du dénominateur sont réelles ou complexes conjuguées et s'appellent des pôles

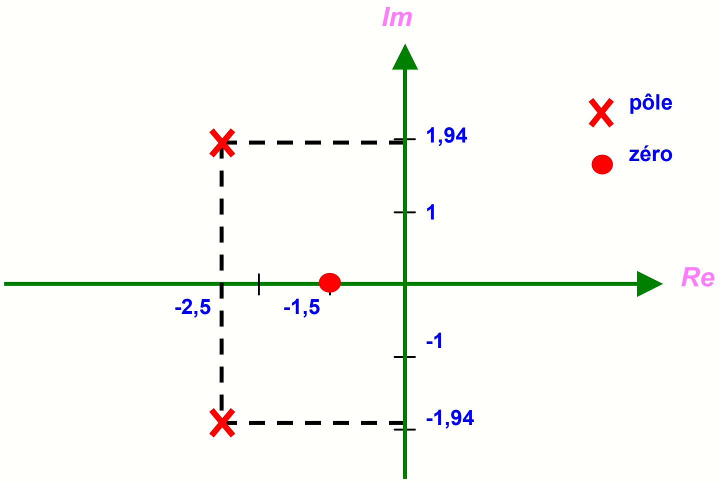
La transmittance du système est entièrement déterminée par la constante K , les zéros z_i et les pôles p_j.

Exemple : système du second ordre

$$T(p)=\frac{2p+3}{p^2+5p+10}=\frac{2(p+1,5)}{(p+2,5-j1,94)(p+2,5+j1,94)}$$

Cette transmittance est caractérisée par :

- une constante K = 2
- un zéro $z_1 = -1,5$
- deux pôles $p_1 = -2,5 - j1,94$ et $p_2 = -2,5 + j1,94$



La représentation des pôles et des zéros dans le plan complexe s'appelle diagramme des pôles et des zéros.

Applet : **calcul des pôles et des zéros d'une transmittance**

4- Calcul de la réponse à une entrée donnée

⇒ si l'entrée est sinusoïdale, la transmittance complexe permet de calculer facilement la réponse :

entrée e(t) → **système $\underline{T}(j\omega)$** → sortie s(t)

$e(t)=E.\cos(\omega t)$ → $s(t)=T.E.\cos(\omega t+\varphi)$

- $S=|\underline{T}(j\omega)|.E$
- $\varphi=\arg\underline{T}(j\omega)$

- la sortie est aussi sinusoïdale, et de même fréquence que l'entrée
- l'amplitude de la sortie dépend de l'amplitude de l'entrée et du module T de la transmittance à la fréquence de travail
- le déphasage φ entre l'entrée et la sortie est égal à l'argument de la transmittance à la fréquence de travail

⇒ si l'entrée est de forme quelconque, la transmittance de Laplace permet de calculer la réponse :

entrée e(t) → **système T(p)** → sortie s(t)

E(p) → S(p) = E(p).T(p)

- on commence par calculer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t)
- on écrit S(p) = E(p).T(p) (évident …)
- en appliquant la transformée de Laplace inverse, on calcule s(t) à partir de S(p)

5- Les propriétés de la transformation de Laplace

Le tableau ci-dessous rappelle les transformées de Laplace de quelques signaux simples et utiles, ainsi que les propriétés les plus importantes de cette transformée :

propriété	fonction du temps	fonction de p
linéarité	$a.f_1(t)+b.f_2(t)$	$a.F_1(p)+b.F_2(p)$
dérivation	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p)$
intégration	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
translation dans le temps	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
translation en p	$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$
signal		
échelon	$f(t)=U(t)$	$\frac{1}{p}$
impulsion de Dirac	$f(t)=\delta(t)$	1
rampe	$f(t)=at$	$\frac{a}{p^2}$
exponentielle	$f(t)=e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$

- pour simplifier les calculs, on supposera que signaux d'entrée sont nuls avant l'instant t =0
- le système est toujours supposé initialement au repos
- la transformée de Laplace F(p) d'une fonction f(t) s'écrit :

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}dt$$

- théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p)$$

- théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{p\to\infty} pF(p)$$

6- Réponse impulsionnelle d'un système

Pour voir si un système linéaire défini par T(p) est stable, on lui applique une perturbation et on observe l'évolution de s(t) :

- si la sortie s(t) retourne à la valeur 0 au bout d'un temps limité, on dira que le système est stable
- si s(t) augmente indéfiniment, le système est instable

Si la perturbation est une impulsion, la transformée de Laplace de la tension de sortie s'écrit, puisque E(p) = 1 :

$$\boxed{S(p)=T(p).E(p)=T(p)=K\frac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_n)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_m)}}$$

Si on décompose cette sortie en éléments simples, on trouve la forme générale de la réponse à une impulsion :

$$S(p)=\frac{K_1}{p-p_1}+\frac{K_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{L_1}{p-m_1+jn_1}+\frac{L_1}{p-m_1-jn_1}+\ldots$$

- p_i sont les pôles réels et
- $m_i \pm jn_i$ sont les pôles complexes conjugués

En regroupant les termes relatifs aux pôles conjugués, on trouve :

$$S(p)=\frac{K_1}{p-p_1}+\frac{K_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{2L_1(p-m_1)}{(p-m_1)^2+n_1^2}+\ldots$$

et la réponse à une impulsion s'écrit :

$$\boxed{s(t)=K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}+\ldots+2L_1e^{m_1t}\cos(n_1t)+\ldots}$$

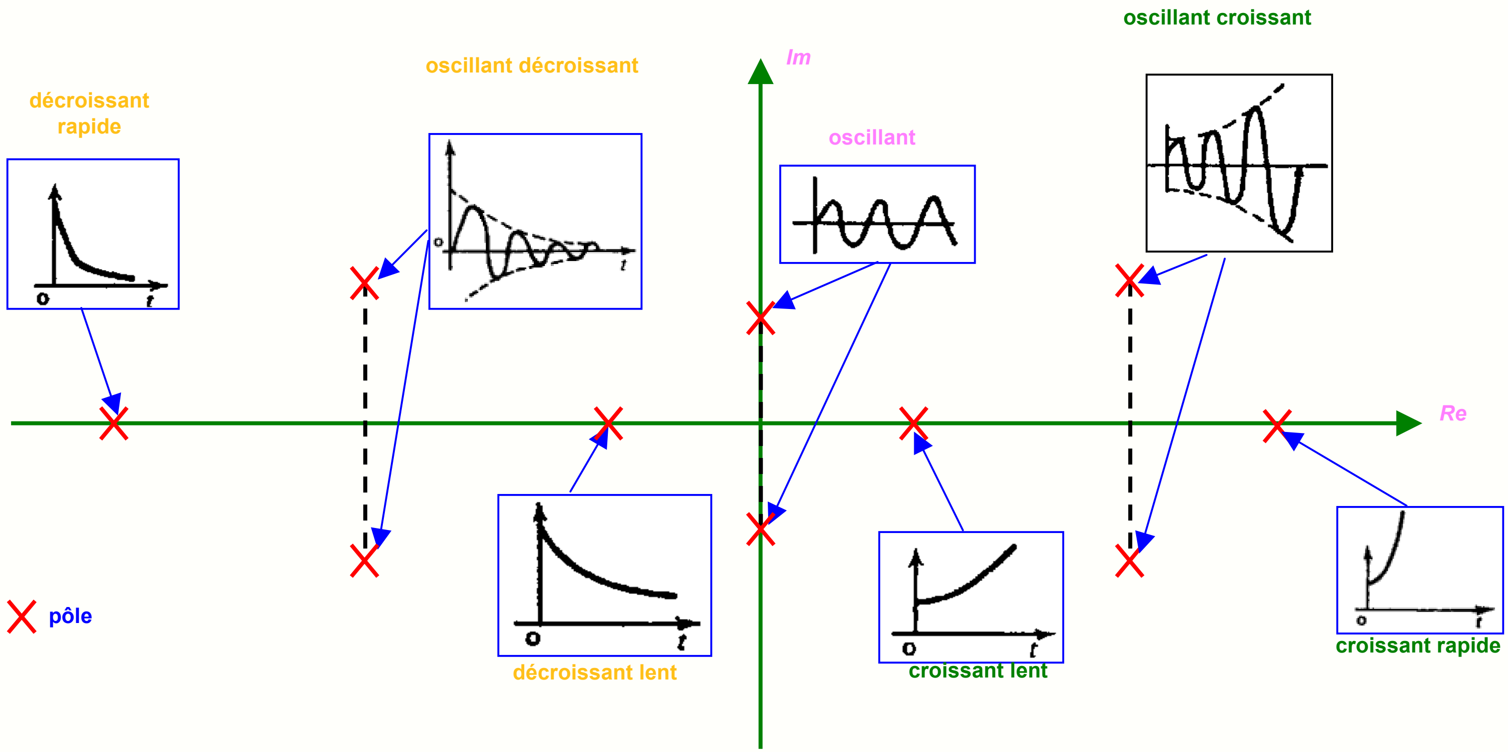
- les parties réelles des pôles réels ou complexes se retrouvent dans les termes exponentiels
- les parties imaginaires des pôles complexes conjugués se retrouvent dans les pulsations des termes oscillants

7- Stabilité d'un système linéaire

Pour que la sortie revienne au repos après une perturbation impulsionnelle :

- tous les termes exponentiels doivent être décroissants
- les pôles réels doivent donc être négatifs, ainsi que la partie réelle des pôles complexes

Critère de stabilité : un système est stable si sa transmittance T(p) n'a que des pôles à partie réelle négative, c'est-à-dire situés dans la moitié gauche du plan complexe.



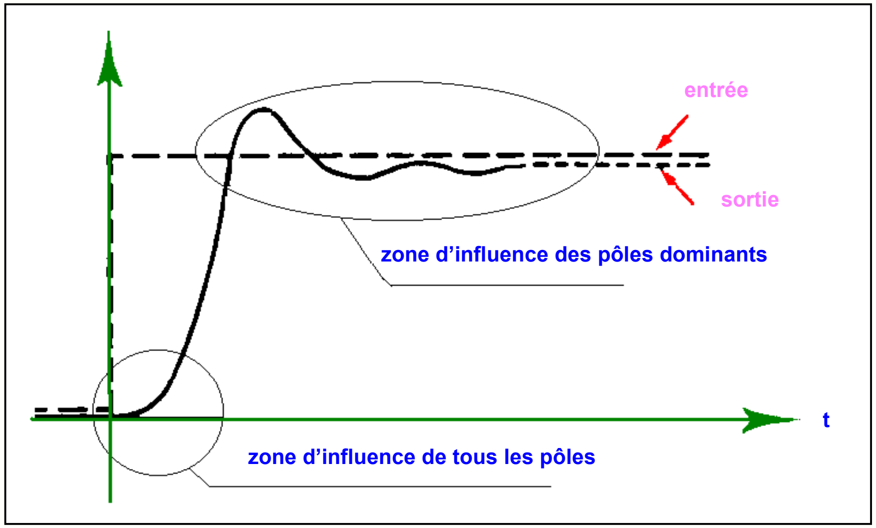
La figure montre la contribution d'un pôle sur la réponse d'un système en fonction de sa place dans le plan complexe.

Applet : allure de la réponse en fonction de la place des pôles

8- Les pôles dominants d'un système

Nous venons de voir que la réponse d'un système linéaire est déterminé par la position de ses pôles dans le plan complexe :

- un système du 10ème ordre a 10 pôles et sa réponse s(t) à une impulsion comporte au maximum 10 termes
- lorsque le temps s'écoule, ces termes s'éteignent les uns après les autres
- les termes de la réponse qui durent le plus longtemps correspondent aux pôles les plus proches de l'origine
- on appelle ces pôles les pôles dominants et ce sont eux qui fixent la forme de la réponse
- les pôles plus éloignés ne jouent que sur la forme du début du régime transitoire



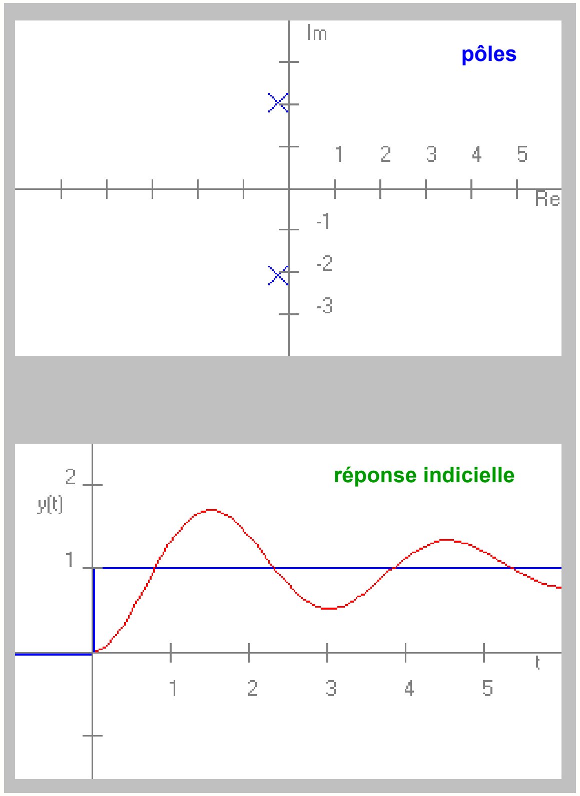
Ce résultat a des conséquences pratiques très utiles:

- un système d'ordre élevé a, sauf exception, un ou deux pôles dominants et se comporte donc comme un 1er ou un 2ème ordre
- on peut simplifier la transmittance d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le ou les pôles dominants
- un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 ou 4 fois supérieur au précédent
- négliger les pôles éloignés de l'origine revient, sur le diagramme de Bode, à négliger les fréquences de coupure élevées

9- Application : comparaison de deux systèmes

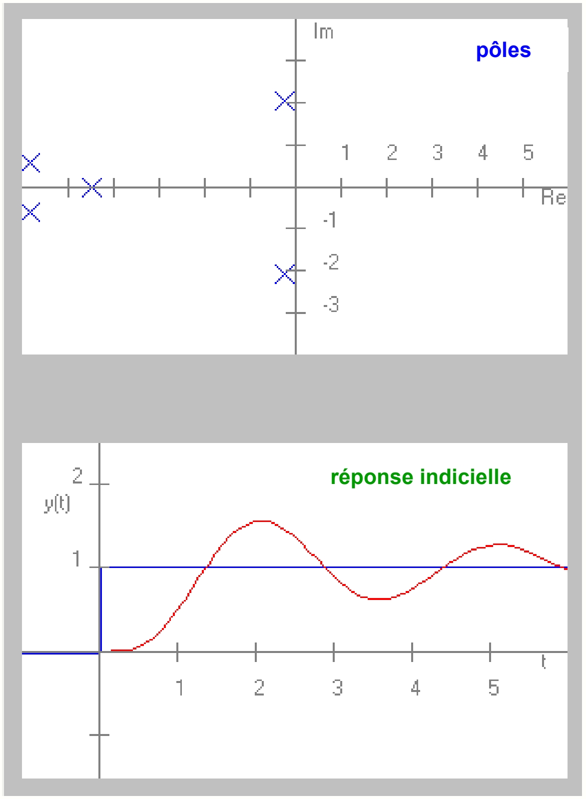
Le système A est caractérisé par :

- système du second ordre
- possède deux pôles complexes conjugués
- dépassement 68%
- pic à 1,5 seconde



Le système B est caractérisé par :

- système du cinquième ordre
- 2 pôles dominants identiques aux pôles de A
- dépassement 56%
- pic à 2,1 seconde



Remarque : les réponses à un échelon de ces 2 systèmes sont voisines sans être tout à fait identiques. On pourra donc dans la plupart des cas assimiler ce 5ème ordre à un 2ème ordre, avec toutes les simplifications de calcul qui en découlent.

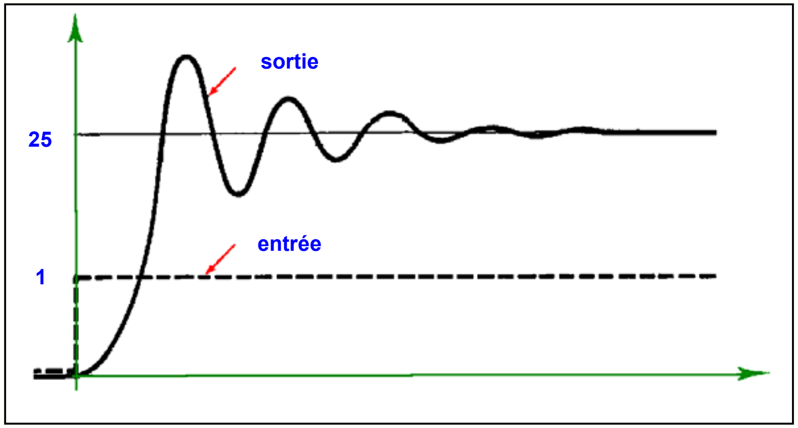
10- Les systèmes passe-bas

La plupart des systèmes électriques ou électromécaniques rencontrés dans la pratique sont des passe-bas :

- les composants actifs (transistor, amplificateur opérationnel …) ont toujours une fréquence limite de fonctionnement
- l'inertie des pièces en mouvement empêche les systèmes électromécaniques de suivre aux fréquences élevées

⇒ ils ont un gain statique

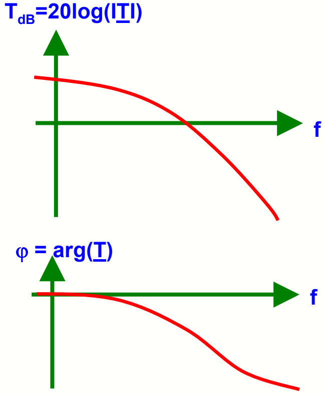
- un système est passe-bas si $T(0) \neq 0$
- l'amplification en continu se mesure en régime permanent
- elle se calcule en faisant $p=0$ dans la transmittance $T(p)$
- elle se calcule en faisant $\omega=0$ dans $\underline{T}(j\omega)$

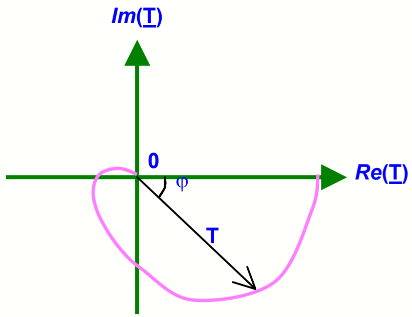


Amplification en continu : 25

⇒ ils ne « passent » pas les fréquences élevées

- un système est passe-bas si $T(p) \to 0$ quand $p \to \infty$
- le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur
- le module de la transmittance chute aux fréquences élevées
- le diagramme de Nyquist finit en 0 si la fréquence augmente





11- Réponse indicielle d'un passe-bas du 1er ordre

Les systèmes passe-bas qui ont une réponse de ce type sont ceux qui ont :

- un seul pôle p réel négatif ou
- plusieurs pôles p1, p2, p3 … avec un pôle p1 dominant soit Ip2I, Ip3I …>>Ip1I

⇒ la transmittance de Laplace peut toujours se mettre sous la forme « standard » :

$$T(p) = \frac{A_0}{1+\tau p}$$

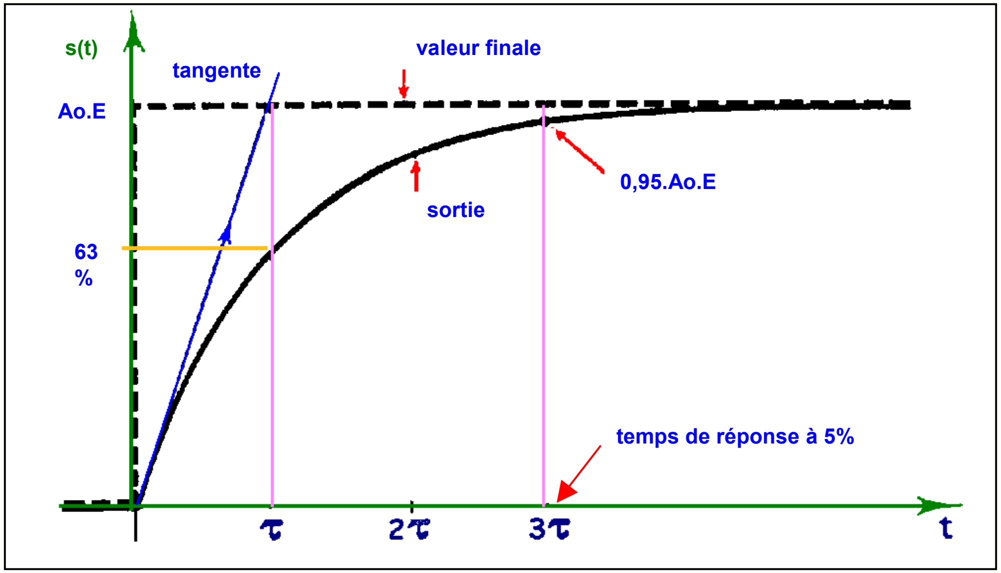
Ao amplification statique
τ constante de temps

⇒ la réponse à un échelon d'amplitude E a pour expression :

$$s(t) = A_0 E(1 - e^{-t/\tau})$$

⇒ la valeur finale vaut Ao.E et le temps de réponse tr à 5% vaut

$$t_r = 3.\tau$$



Au bout d'un temps $t = \tau$

- la tangente à l'origine coupe la valeur finale
- la réponse est à 63% de la valeur finale

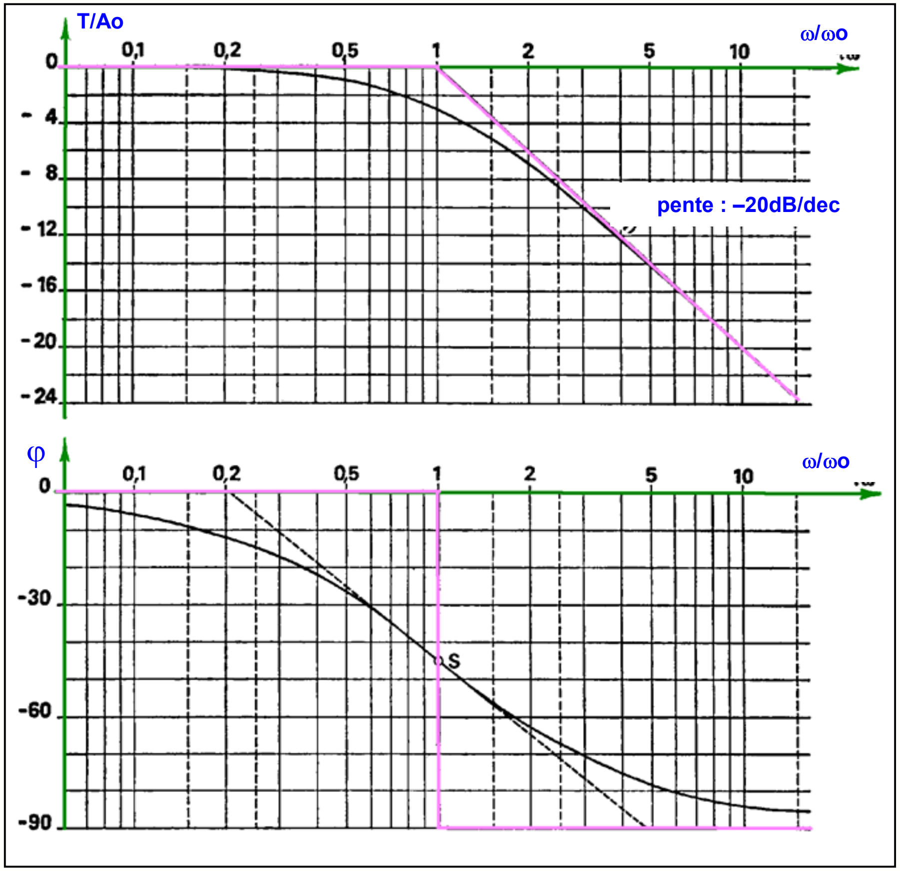
12- Réponse en fréquence d'un passe-bas du 1er ordre

⇒ la transmittance complexe s'écrit facilement sous une forme standard classique :

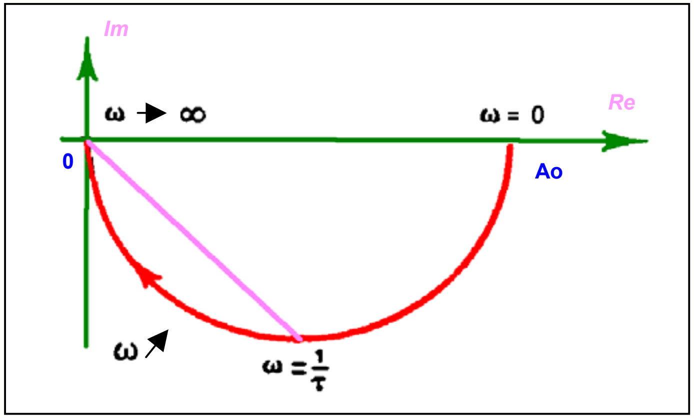
$$\underline{T}(j\omega)=\frac{Ao}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec une pulsation de coupure $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$

⇒ le diagramme de Bode a l'allure suivante :



⇒ le diagramme de Nyquist est un cercle :



13- La réponse indicielle d'un passe-bas du 2ème ordre (1)

Un système du second ordre a une transmittance qui peut toujours s'écrire sous la forme standard :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

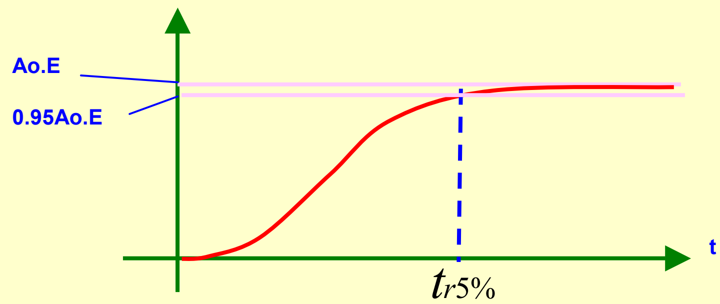
avec

- Ao : amplification statique
- m : amortissement
- ωo : pulsation propre

⇒ si m > 1, T(p) a deux pôles réels p1 et p2

- la transmittance peut se factoriser
- cas peu intéressant, le système est trop lent
- la transmittance s'écrit :

$$T(p) = \frac{A_0}{(1 - \dfrac{p}{P_1})(1 - \dfrac{p}{p_2})}$$

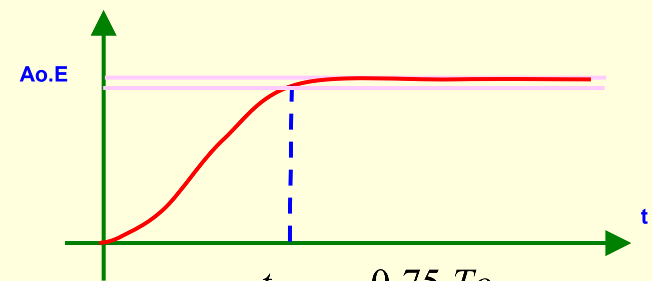


$$s(t) = 1 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$$

⇒ si m = 1, T(p) a un pôle double po

- la transmittance peut se factoriser
- ce cas correspond au régime critique
- cas souvent jugé trop lent
- la transmittance s'écrit :

$$T(p) = \frac{A_0}{(1 - \dfrac{p}{P_0})^2}$$



$$t_{r5\%} = 0{,}75.To$$

$$s(t) = 1 - e^{p_0 t}(1 + p_0 t)$$

14- La réponse indicielle d'un passe-bas du 2ème ordre (2)

Un système du second ordre a une transmittance qui peut toujours s'écrire sous la forme standard :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

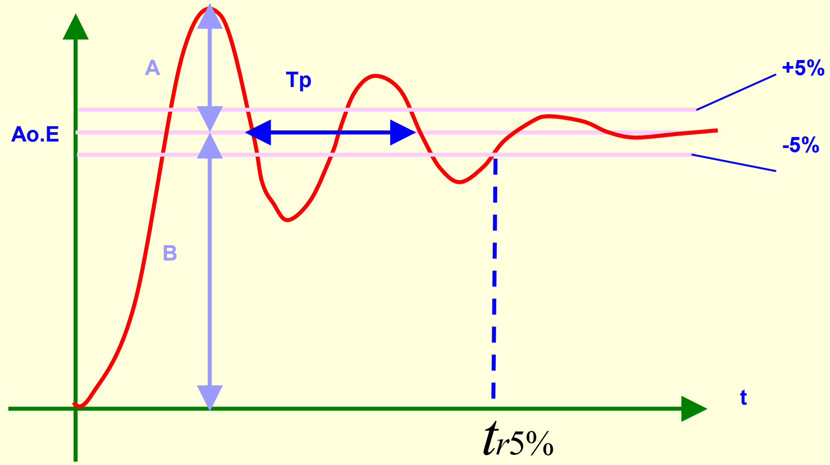
avec

- Ao : amplification statique
- m : amortissement
- ωo : pulsation propre

⇒ si m < 1, T(p) a deux pôles complexes conjugués p1 et p2

- la transmittance ne peut pas se factoriser
- les régimes transitoires sont satisfaisants si 0,3 < m < 1
- le dépassement vaut d = A/B
- la transmittance s'écrit :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$



- les deux pôles ont pour expression:

$$p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

$$p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

$$s(t) = 1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

avec

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-m^2}$$

$$\cos(\varphi) = m$$

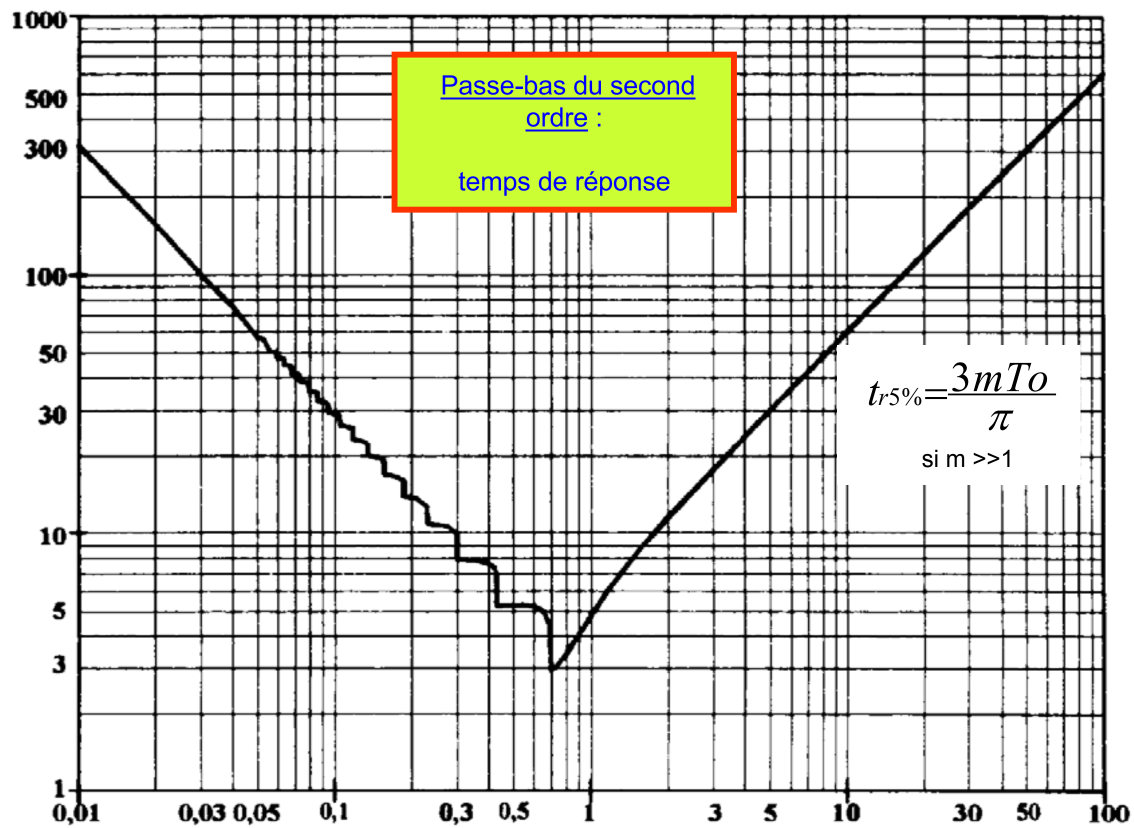
- pseudo-période: $T_p = \dfrac{To}{\sqrt{1-m^2}}$

15- Influence de m sur le temps de réponse

Pour obtenir le temps de réponse tr à 5% du système pour une valeur d'amortissement m :

- lire le temps de réponse réduit T = tr.ωo
- diviser cette valeur par la pulsation propre : tr = T/ ωo

temps de réponse réduit T= tr. ωo



amortissement m

Exemple

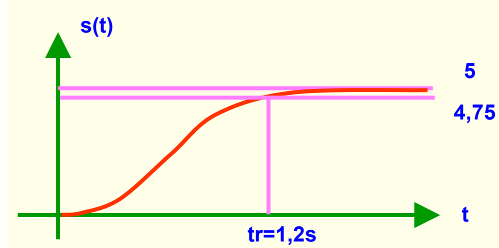
Un système est caractérisé par :

- pulsation propre ωo = 10 rad/s
- amortissement m = 2
- transmittance statique Ao = 5

Son temps de réponse tr vaut :

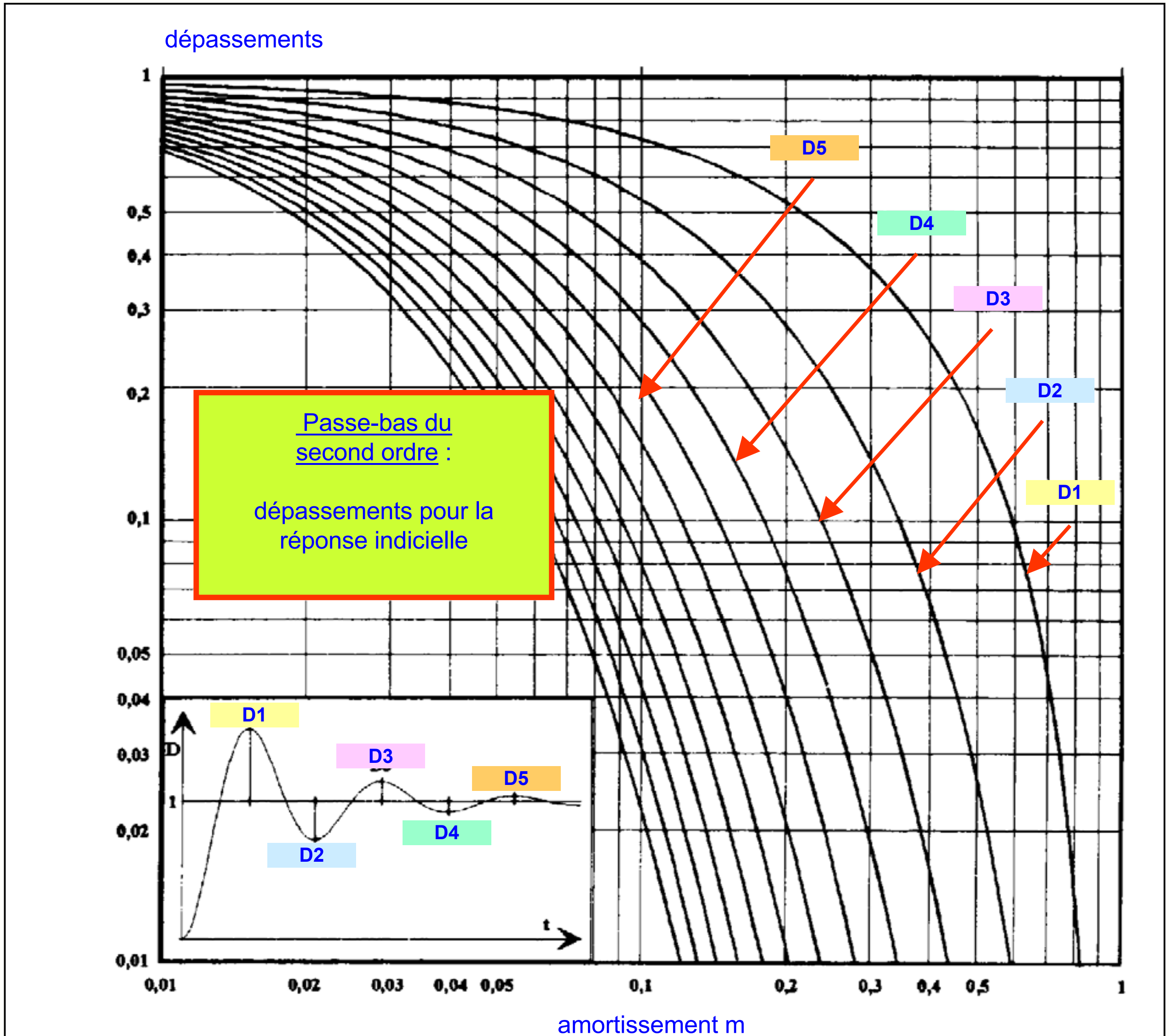
- T = 12 (donné par l'abaque)
- tr = T/ ωo = 12/10 = 1,2 s

Allure de sa réponse indicielle :



16- Influence de m sur le dépassement

L'abaque ci-dessous donne les dépassements de la réponse indicielle pour une valeur d'amortissement m :



Exemple

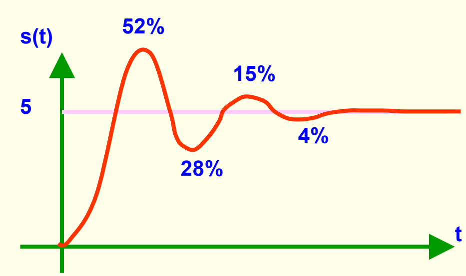
Un système est caractérisé par

- pulsation propre ωo = 10 rad/s
- amortissement m = 0,2
- transmittance statique Ao = 5

Les dépassements valent :

- D1 = 0,52 = 52%
- D2 = 0,28 = 28%
- D3 = 0,15 = 15%
- D4 = 0,04 = 4%

Allure de sa réponse indicielle :



17- Réponse en fréquence d'un passe-bas du 2ème ordre (1)

Un système du second ordre a une transmittance complexe qui s'écrit sous la forme standard :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

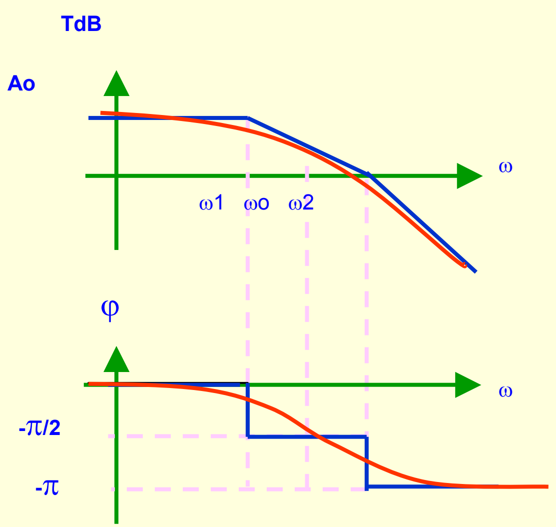
avec

- Ao : amplification statique
- m : amortissement
- ωo : pulsation propre

⇒ si m > 1, la transmittance a deux pôles réels

- la transmittance se factorise
- le diagramme de Bode a 2 cassures
- la courbe passe à -3dB sous les cassures
- la pente passe à –20, puis à –40dB/dec

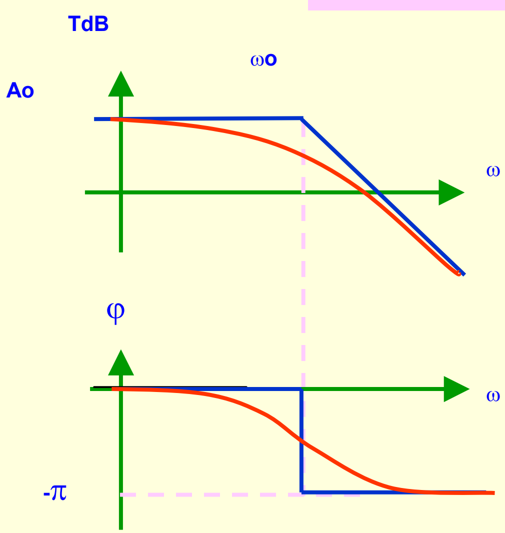
$$\underline{T}(j\omega) = \frac{Ao}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$$



⇒ si m = 1, la transmittance a un pôle double po

- la transmittance se factorise
- le diagramme de Bode a une cassure double
- la courbe passe à -6dB sous la cassure
- la pente est de –40dB/dec après ωo

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{Ao}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$



18- Réponse en fréquence d'un passe-bas du 2ème ordre (2)

Un système du second ordre a une transmittance complexe qui s'écrit sous la forme standard :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

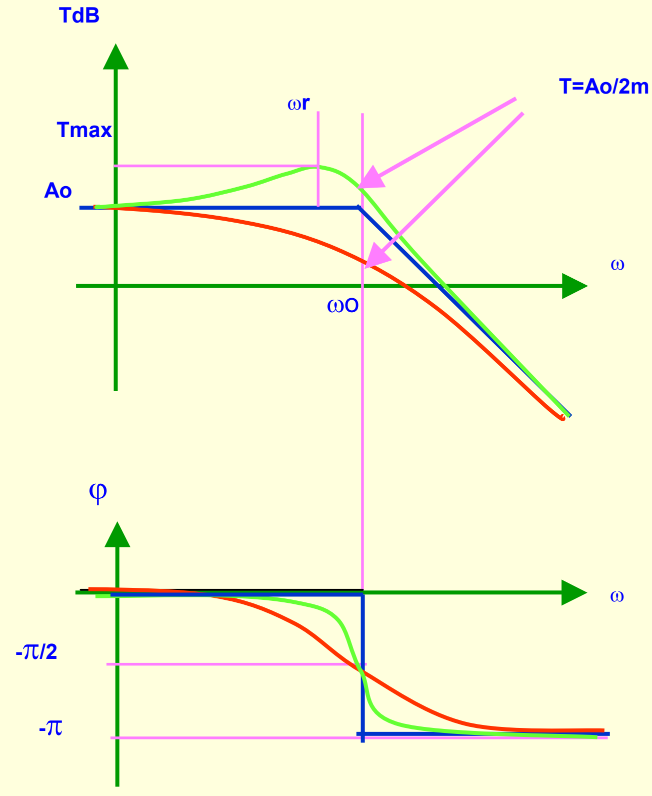
avec

- Ao : amplification statique
- m : amortissement
- ωo : pulsation propre

⇒ si m < 1, deux pôles conjugués p1 et p2

- la transmittance ne peut pas se factoriser
- à la cassure, le module vaut T=Ao/2m
- si m < 0,707 le module passe par un maximum
- l'allure des courbes de gain et de phase dépend de m
- la pente est de –40dB/dec après ωo

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{Ao}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$



- le maximum de valeur Tmax se trouve à ωr

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

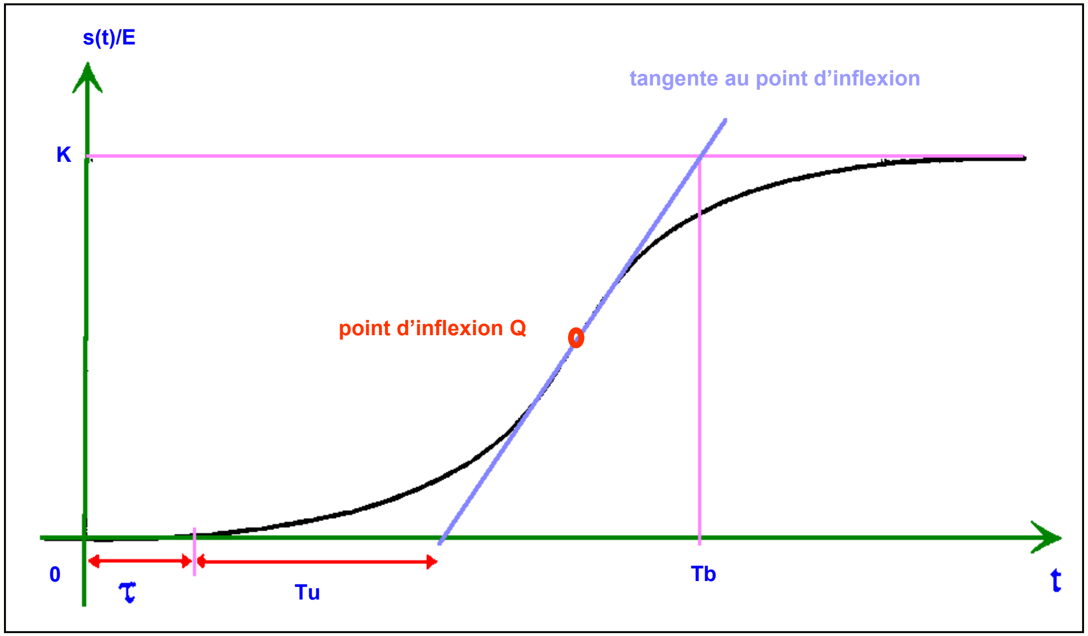
19- Modélisation d'un système

Plusieurs techniques ont été développées à l'usage des industriels qui ont besoin de modéliser leur système pour en connaître la transmittance T(p).

La méthode de Strejc, par exemple, permet de trouver l'expression de T(p) à partir de l'enregistrement de sa réponse indicielle dans le cas où le processus a une fonction de transfert :

- sans pôle à l'origine c'est-à-dire pas d'intégrateur
- sans pôles complexes conjugués, c'est-à-dire pas d'oscillations dans la réponse indicielle
- ayant n constantes de temps T
- admettant éventuellement un retard pur τ

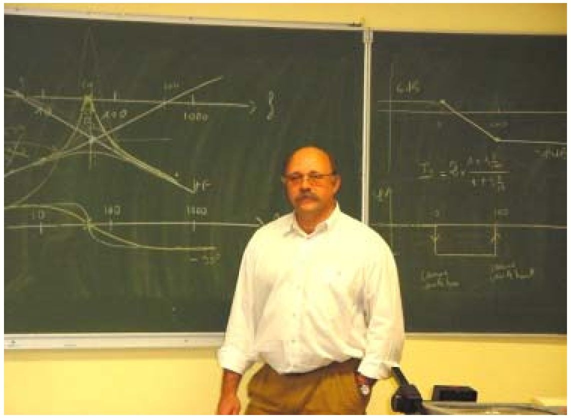
$$\boxed{T(p) = K\frac{e^{-\tau p}}{(1+Tp)^n}}$$



Mode opératoire :

- la valeur finale de s(t) donne K
- on trace la tangente au point d'inflexion Q
- on mesure les temps τ, Tu et Tb
- on calcule Ta = Tb – (Tu + τ) puis Tu/Ta
- si Tu/Ta ≈ 0 alors n = 1
- si Tu/Ta ≈ 0,1 alors n = 2
- si Tu/Ta ≈ 0,2 alors n = 3
- si Tu/Ta ≈ 0,3 alors n = 4

Zillisheim - l'étang en hiver



FIN