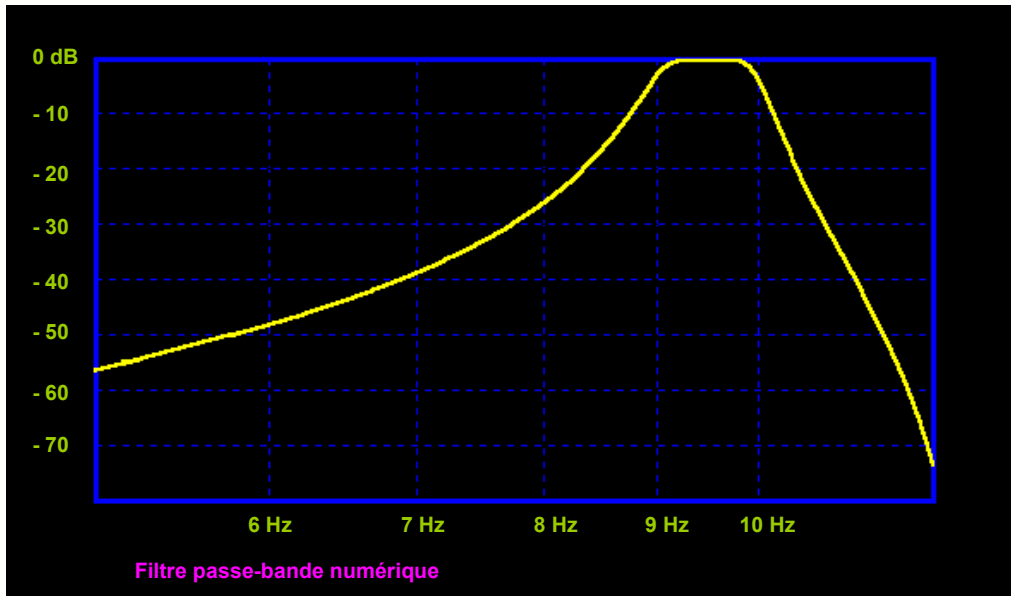




Filtrage numérique





- 1- Transformée en z d'une séquence binaire
- 2- Transformées en z des fonctions usuelles
- 3- Transformée en z ou transformée de Laplace ?
- 4- Transmittance en z
- 5- Exemple de synthèse d'un filtre numérique
- 6- Structure générale d'un filtre numérique
- 7- Algorithme de calcul et transmittance
- 8- Exemple de passage de l'algorithme à $T(z)$
- 9- Exemple de passage de $T(z)$ à l'algorithme
- 10- Les deux familles de filtres numériques
- 11- Stabilité d'un filtre numérique
- 12- Réponse harmonique
- 13- Exemple de réponse harmonique
- 14- Synthèse par la transformée bilinéaire
- 15- Outils de synthèse de filtres FIR
- 16- Outils de synthèse de filtres IIR
- 17- Exemple de réalisation de filtre numérique

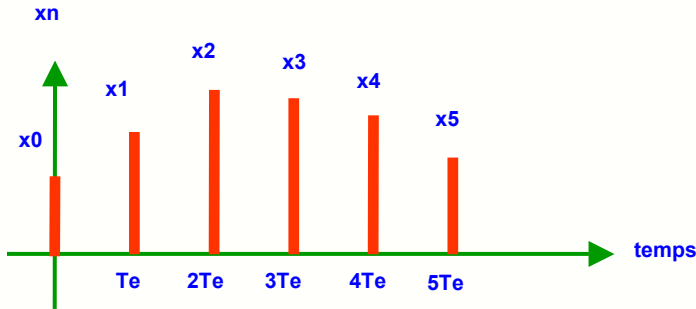




1- Transformée en z d'une séquence binaire



Soit une séquence numérique x_n constituée des valeurs du signal $x(t)$ échantillonné aux instants $t=0, T_e, 2T_e \dots$



NB : on suppose dans tout ce cours que le signal $x(t)$ est nul avant $t = 0$.

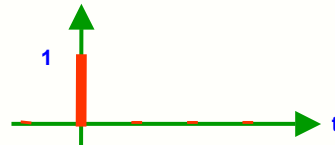
On appelle transformée en z de la séquence numérique x_n le polynôme $X(z)$ défini par la relation :

$$X(z) = x_0 + x_1 \cdot z^{-1} + x_2 \cdot z^{-2} + \dots + x_n \cdot z^{-n} + \dots$$

Prenons quelques exemples simples :

séquence impulsion unité

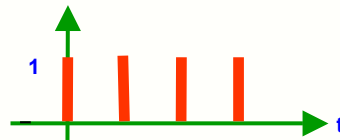
- $x_n = 0$ avant $t = 0$
- $x_n = 1$ à $t = 0$
- $x_n = 0$ à $T_e, 2T_e \dots$



$$X(z) = 1$$

séquence échelon unité

- $x_n = 0$ avant $t = 0$
- $x_n = 1$ à $t = 0, T_e, 2T_e \dots$



$$X(z) = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots + 1 \cdot z^{-n} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

2- Transformées en z des fonctions usuelles



- dans quelques cas particuliers simples, la transformée en z se calcule directement à partir de sa définition
- pour tous les autres cas, on dispose de tables donnant les transformées en z des signaux usuels

$f(t)$	$F(p)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$U(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$a.t$	$\frac{a}{p^2}$	$\frac{a.Te.z}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aTe}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aTe})}{(z-1)(z-e^{-aTe})}$
$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$	$\frac{z(z-e^{-aTe} \cos bTe)}{z^2 - 2ze^{-aTe} \cos bTe + e^{-2aTe}}$
$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$	$\frac{ze^{-aTe} \sin bTe}{z^2 - 2ze^{-aTe} \cos bTe + e^{-2aTe}}$



3- Transformée en z ou transformée de Laplace ?



En réalité, cette transformée en z n'est rien d'autre qu'une transformée de Laplace cachée :

- le signal échantillonné $x^*(t)$ peut s'écrire comme une somme d'impulsions de Dirac retardées et d'amplitudes variables :

$$x^*(t) = x_0 \cdot \delta(t) + x_1 \cdot \delta(t - Te) + x_2 \cdot \delta(t - 2Te) + \dots + x_n \cdot \delta(t - nTe) + \dots$$

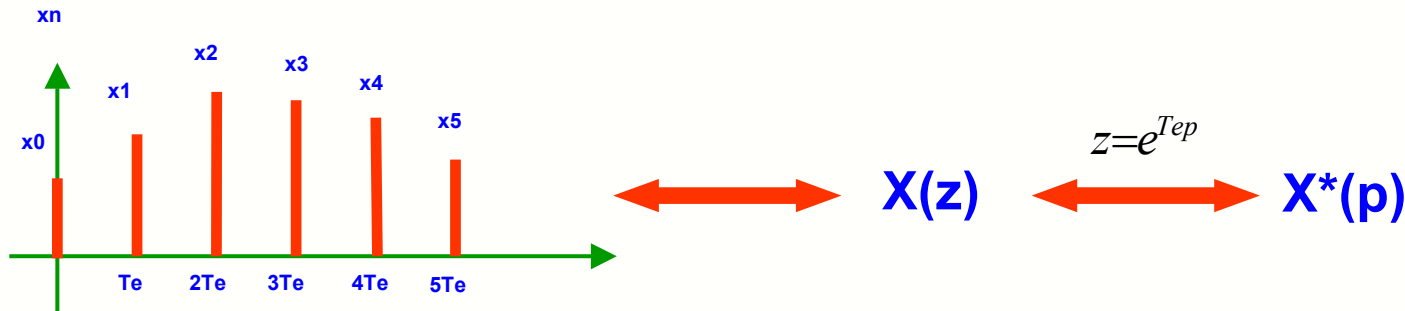
- la transformée de Laplace de $x^*(t)$ s'écrit alors :

$$X(z) = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot 1e^{-Tep} + x_2 \cdot 1e^{-2Tep} + \dots + x_n \cdot 1e^{-nTep} + \dots$$

- si on pose $z = e^{Tep}$ on retrouve la définition de la transformée en z :

$$X(z) = x_0 + x_1 \cdot z^{-1} + x_2 \cdot z^{-2} + \dots + x_n \cdot z^{-n} + \dots$$

La transformée en z d'un signal a donc les mêmes propriétés mathématiques que la transformée de Laplace.



- un signal $x(t)$ analogique continu a une transformée de Laplace $X(p)$
- un signal échantillonné $x^*(t)$ a une transformée en z $X(z)$ et une transformée de Laplace $X^*(p)$ qu'on utilise rarement
- on passe facilement de $X^*(p)$ à $X(z)$ par un simple changement de variable, la transformée en z $X(z)$ étant moins lourde à écrire que $X^*(p)$
- il n'y a pas de passage simple possible entre $X(p)$ et $X^*(p)$, mais il existe des tables permettant de passer de $X(p)$ à $X^*(p)$ et $X(z)$



4- Transmittance en z d'un filtre numérique



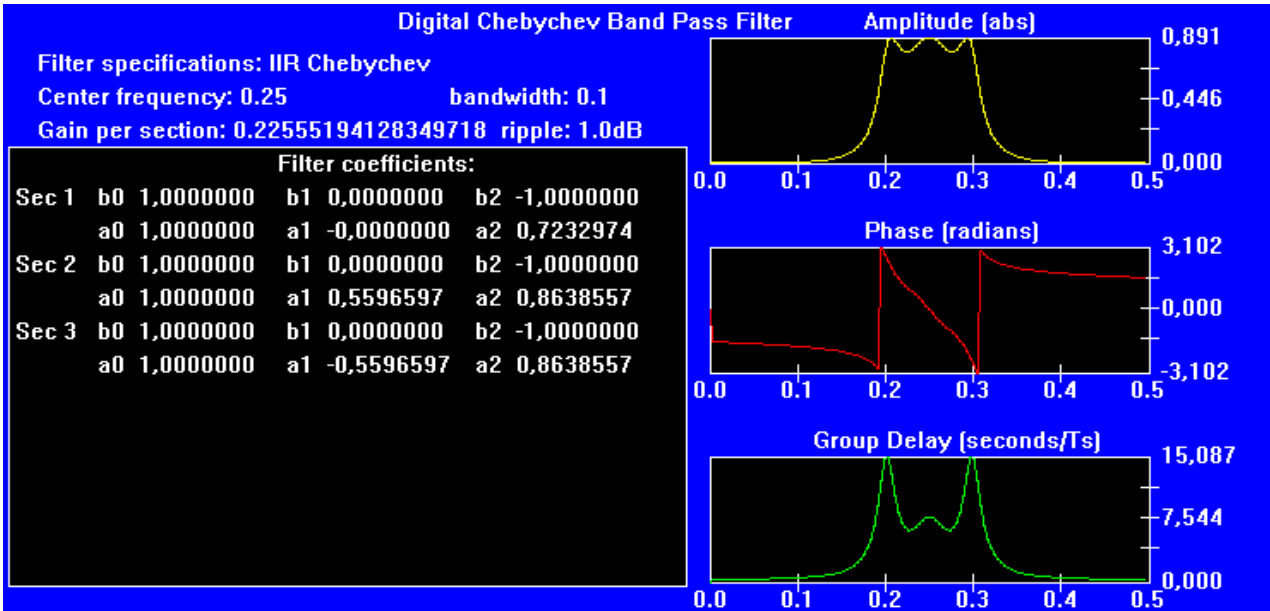
Soit un système qui à une séquence d'entrée x_n restitué en sortie une séquence y_n :



la transmittance $T(z)$ du filtre est alors définie par :

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Puisque les transformées $X(z)$ et $Y(z)$ sont des polynômes contenant les puissances négatives de z , la transmittance sera un rapport de deux polynômes en puissances négatives de z .



- Exemple de filtre numérique :**
- passe-bande de Chebychev
 - 6ème ordre
 - fréquence centrale : $f_0 = 0,25.f_e$
 - largeur $B = 0,1.f_e$
 - 3 cellules 2ème ordre en cascade
 - transmittance $T(z)$
 - $T(z) = H_1(z).H_2(z).H_3(z)$

$$H_1(z) = 0,225 \frac{1-z^{-2}}{1+0,7233z^{-2}}$$

$$H_2(z) = 0,225 \frac{1-z^{-2}}{1+0,56z^{-1}+0,864z^{-2}}$$

$$H_3(z) = 0,225 \frac{1-z^{-2}}{1-0,56z^{-1}+0,864z^{-2}}$$

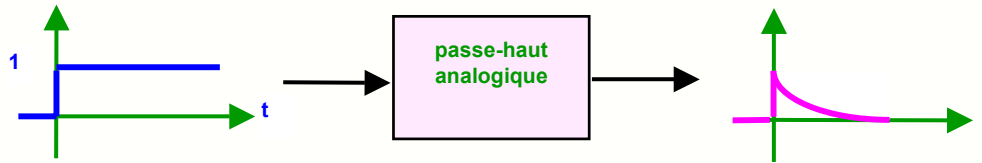


5- Exemple de synthèse d'un filtre numérique



Exemple : on se propose de trouver la transmittance d'un **filtre passe-haut numérique** qui répond à un échelon comme un filtre passe-haut analogique du 1er ordre de constante de temps 10 ms soit de fréquence de coupure $f_c = 15,9$ Hz

Filtre analogique



$$x(t)=1$$

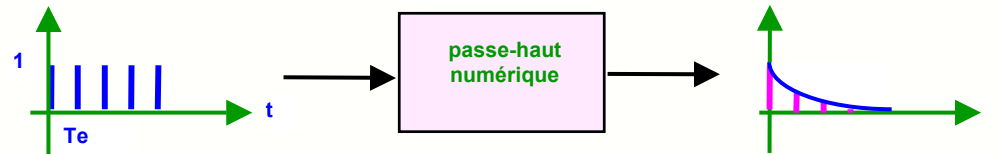
$$X(p)=\frac{1}{p}$$

$$T(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{p}{p+100}$$

$$y(t)=1.e^{-100.t}$$

$$Y(p)=\frac{1}{p+100}$$

Filtre numérique



$$x(nTe)=1$$

$$X(z)=\frac{z}{z-1}$$

$f_e = 1$ kHz
 $T_e = 1$ ms

$$y(nTe)=1.e^{-100.n.Te}=1.e^{-0,1n}$$

$$Y(z)=\frac{z}{z-0,905}$$

$$T(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z-1}{z-0,905}$$

Remarques :

- il est simple de trouver la transmittance d'un filtre numérique qui à une entrée donnée répond par une sortie de forme particulière
- si l'entrée est une impulsion, cette technique s'appelle la **méthode de l'identification de la réponse impulsionnelle**
- si l'entrée est un échelon, cette technique s'appelle la **méthode de l'identification de la réponse indicielle**



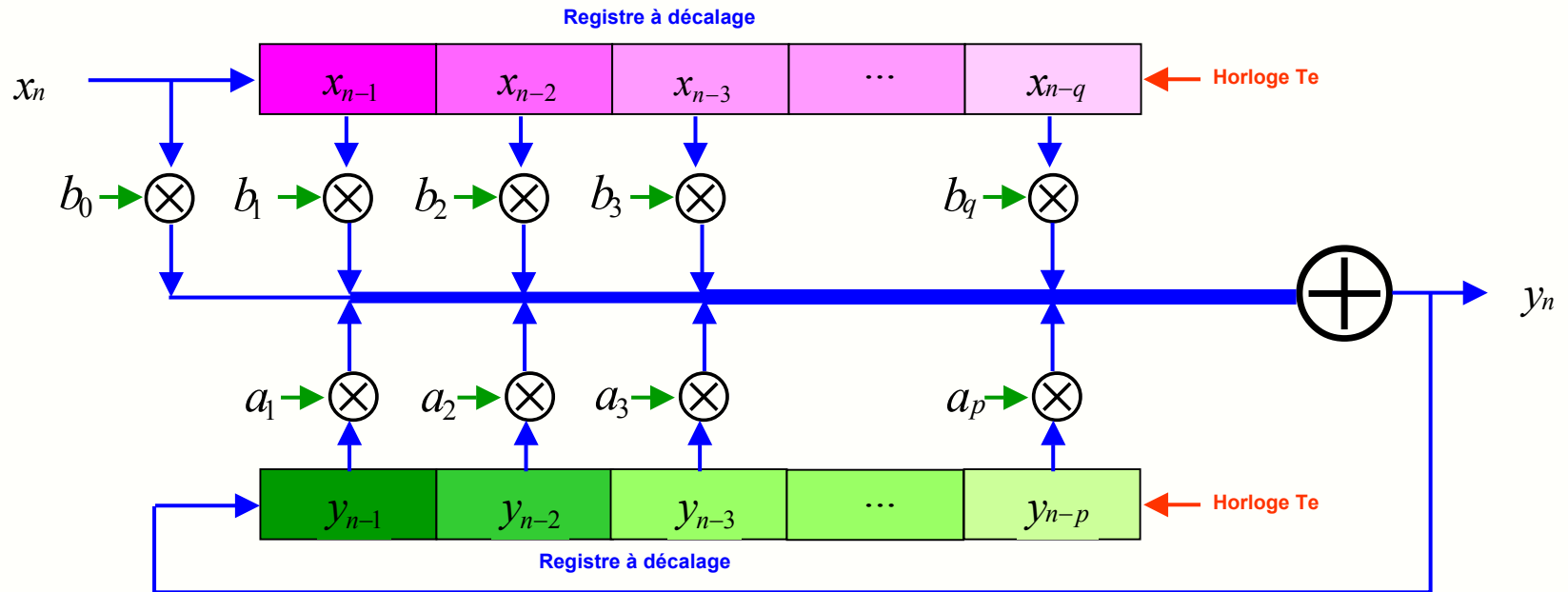
6- Structure générale d'un filtre numérique



Un filtre numérique calcule la valeur numérique de la sortie y_n à l'instant $t = nT_e$ à partir des échantillons précédents de la sortie et des échantillons précédents de l'entrée, plus celui qui vient d'être appliqué sur l'entrée x_n :

$$y_n = a_1 \cdot y_{n-1} + a_2 \cdot y_{n-2} + \dots + a_p \cdot y_{n-p} + b_0 \cdot x_n + b_1 \cdot x_{n-1} + \dots + b_q \cdot x_{n-q}$$

Cette formule de calcul ou **algorithme** conduit naturellement à la structure générale d'un filtre numérique :



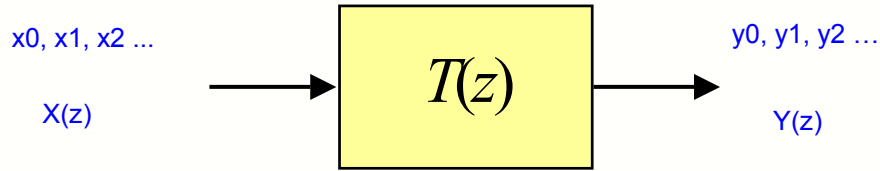
Remarques :

- toutes les T_e secondes, les valeurs sont décalées dans les registres, multipliées par leur coefficient respectif et additionnées pour donner y_n
- cette structure peut être réalisée sous forme matérielle (registres, multiplicateurs, additionneur) ou entièrement logicielle
- un filtre simple calcule la sortie à partir de quelques échantillons seulement
- au contraire, l'algorithme d'un filtre sophistiqué peut compter jusqu'à une centaine de termes

7- Algorithme de calcul et transmittance $T(z)$



L'algorithme permet de calculer la valeur de l'échantillon de sortie y_n en fonction des échantillons d'entrée et de sortie précédents.



$$y_n = a_1 \cdot y_{n-1} + a_2 \cdot y_{n-2} + \dots + a_p \cdot y_{n-p} + b_0 \cdot x_n + b_1 \cdot x_{n-1} + \dots + b_q \cdot x_{n-q}$$

La transmittance $T(z)$ permet de synthétiser le filtre, de tracer son diagramme de Bode et d'étudier ses réponses à une impulsion, à un échelon ou à une entrée quelconque.

Pour passer de l'algorithme, relatif au domaine temporel, à la variable z , on utilise la règle de passage très simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n-i} \longleftrightarrow X(z) \cdot z^{-i} \\ y_{n-i} \longleftrightarrow Y(z) \cdot z^{-i} \end{array} \right.$$

z^{-1}
opérateur retard

en utilisant cette règle, l'algorithme se transforme en :

$$Y(z) = a_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} + a_2 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} + \dots + a_p \cdot Y(z) \cdot z^{-p} + b_0 \cdot X(z) + b_1 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + \dots + b_q \cdot X(z) \cdot z^{-q}$$

soit, après factorisation :

$$Y(z)(1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - \dots - a_p \cdot z^{-p}) = X(z)(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_q \cdot z^{-q})$$

ce qui donne la transmittance en z du filtre :

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_q \cdot z^{-q}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - \dots - a_p \cdot z^{-p}}$$



8- Exemple de passage de l'algorithme à T(z)

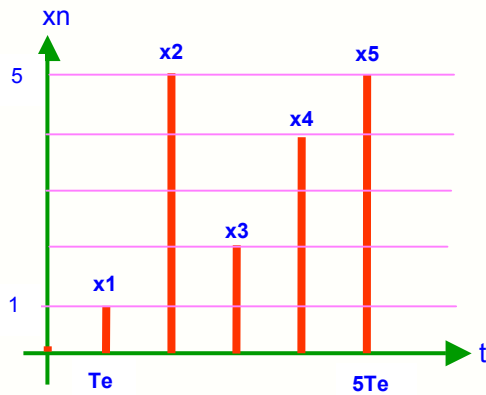


On souhaite établir la transmittance T(z) du filtre qui effectue la **moyenne glissante sur les 4 derniers échantillons** arrivés sur l'entrée :

son algorithme s'écrit :

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}}{4} = 0,25 \cdot (x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3})$$

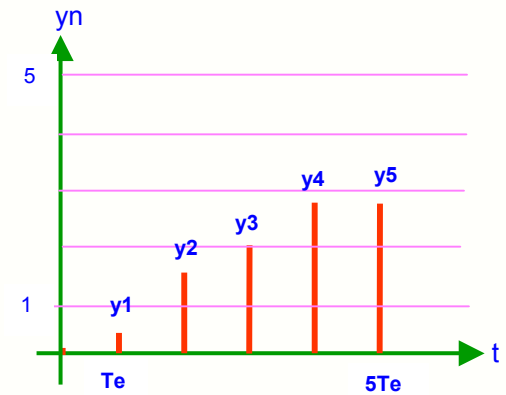
à partir de l'algorithme, il est facile de calculer manuellement les sorties aux instants Te, 2Te ... pour observer le comportement du filtre :



Exemple de signal d'entrée



$$\begin{aligned}
 y_0 &= 0,25 \cdot x_0 = 0 \\
 y_1 &= 0,25 \cdot (x_1 + x_0) = 0,25 \\
 y_2 &= 0,25 \cdot (x_2 + x_1 + x_0) = 1,5 \\
 y_3 &= 0,25 \cdot (x_3 + x_2 + x_1 + x_0) = 2 \\
 y_4 &= 0,25 \cdot (x_4 + x_3 + x_2 + x_1) = 2,75 \\
 y_5 &= 0,25 \cdot (x_5 + x_4 + x_3 + x_2) = 2,75 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$



Sortie filtrée

en utilisant la règle de passage au domaine des « z », l'algorithme se transforme en :

$$Y(z) = 0,25 \cdot (X(z) + X(z) \cdot z^{-1} + X(z) \cdot z^{-2} + X(z) \cdot z^{-3})$$

ce qui donne la **transmittance en z** du filtre :

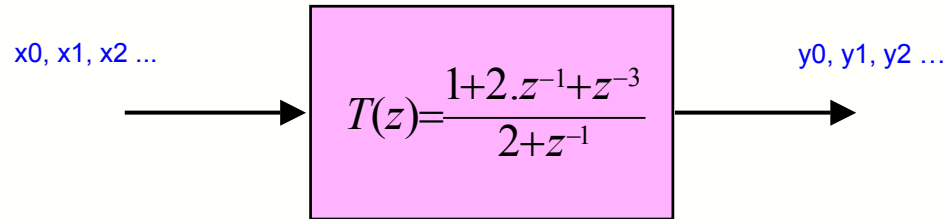
$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0,25 \cdot (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{4}$$



9- Exemple de passage de T(z) à l'algorithme



On souhaite trouver l'algorithme de calcul du filtre caractérisé par la transmittance T(z) suivante :



- la transmittance est le rapport entre la transformée en z de la sortie et la transformée en z de l'entrée :

$$T(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-3}}{2 + z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{soit, en faisant le produit en croix :} \quad (1 + 2z^{-1} + z^{-3}) \cdot X(z) = (2 + z^{-1}) \cdot Y(z)$$

- ce qui donne, en isolant Y(z) :

$$2 \cdot Y(z) = -Y(z) \cdot z^{-1} + X(z) + 2 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + X(z) z^{-3}$$

- en utilisant la règle de passage au domaine temporel, l'algorithme s'écrit :

$$2 \cdot y_n = -y_{n-1} + x_n + 2 \cdot x_{n-1} + x_{n-2}$$

- soit, enfin :

$$y_n = -0,5 \cdot y_{n-1} + 0,5 \cdot x_n + x_{n-1} + 0,5 \cdot x_{n-2}$$



11 - Stabilité d'un filtre numérique



Comme pour les filtres analogiques, il est possible de prévoir la stabilité à partir de la transmittance du système.

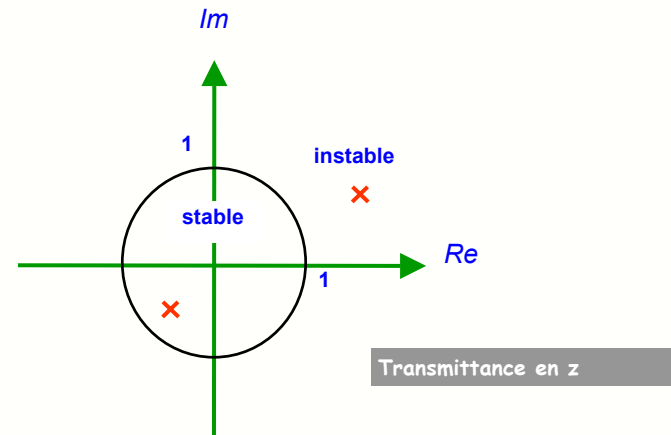
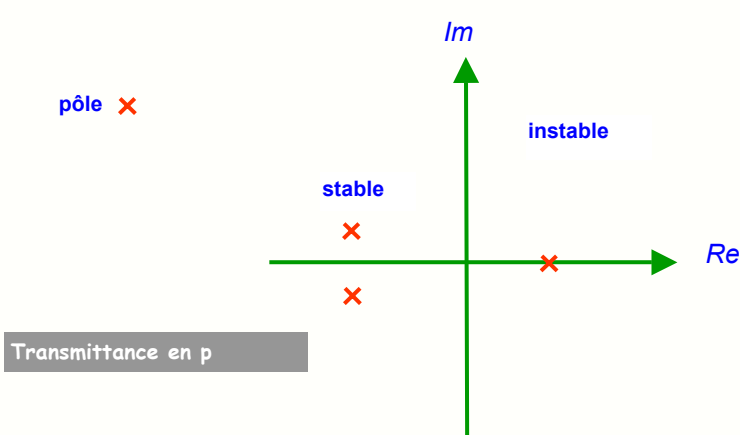
Rappel : un système de transmittance $T(p)$ est stable si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

Ce critère de stabilité reste valable pour les transmittances $T^*(p)$ des systèmes échantillonnés :

▪ un système stable aura des pôles p_i à partie réelle négative : $p_i = a_i + j \cdot b_i$ avec $a_i \leq 0$

▪ la valeur de z correspondant à ce pôle s'écrit : $z_i = e^{T_e \cdot p_i} = e^{T_e(a_i + j \cdot b_i)} = e^{T_e a_i} [\cos(b_i) + j \sin(b_i)]$

▪ si le système est stable, le module de ce nombre complexe est tel que : $|z_i| = e^{T_e a_i} \leq 1$ puisque $a_i \leq 0$



Critère de stabilité : un système échantillonné de transmittance $T(z)$ est stable si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.



12- Réponse harmonique d'un filtre numérique



Pour représenter la courbe de gain et de phase d'un filtre, il faut étudier sa transmittance complexe et il faut donc passer de $T(z)$ à $\underline{T}(j\omega)$:

$$T(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_q \cdot z^{-q}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - \dots - a_p \cdot z^{-p}}$$

$$z = e^{Tep} = e^{j\omega Te}$$



$$T(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega Te} + \dots + b_q \cdot e^{-jq\omega Te}}{1 - a_1 \cdot e^{-j\omega Te} - a_2 \cdot e^{-j2\omega Te} - \dots - a_p \cdot e^{-jp\omega Te}}$$

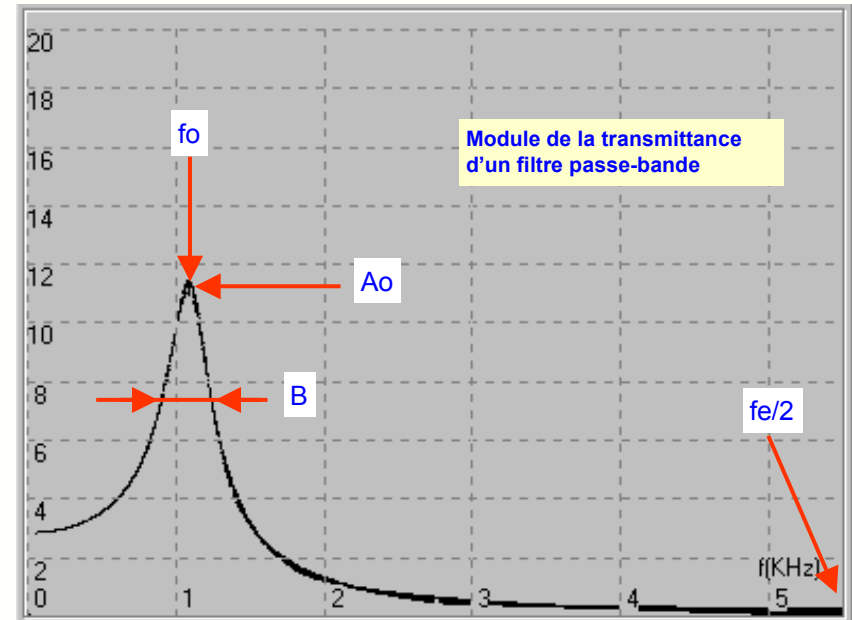
- l'expression obtenue pour la transmittance comporte des exponentielles complexes
- elle est donc assez **lourde** à manipuler mathématiquement
- le calcul du module et de la phase de la transmittance mène souvent à des calculs fastidieux
- des **logiciels de simulation** permettent d'arriver rapidement à la courbe de réponse

Exemple de simulation :

- algorithme du filtre

$$y_n = 1,5 \cdot y_{n-1} - 0,85 \cdot y_{n-2} + x_n$$

- filtre **passe-bande**
- fréquence d'échantillonnage $f_e = 11 \text{ kHz}$
- fréquence centrale $f_0 = 1,1 \text{ kHz}$
- amplification maximale $A_0 = 11,2$
- bande passante $B = 200 \text{ Hz}$
- coefficient de qualité $Q = f_0/B = 5,5$





13- Exemple de réponse harmonique



On s'intéresse à un **filtre moyenneur sur deux valeurs**, la fréquence d'échantillonnage étant de $f_e = 1$ kHz :

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

$$T(z) = \frac{1+z^{-1}}{2} \xrightarrow{z=e^{Tep}=e^{j\omega Te}} T(j\omega) = \frac{1+e^{-j\omega Te}}{2} = \frac{1+\cos(\omega Te) - j\sin(\omega Te)}{2}$$

on travaille plus volontiers avec la fréquence f :

$$T(jf) = \frac{1+\cos(2\pi \frac{f}{f_e}) - j\sin(2\pi \frac{f}{f_e})}{2}$$

le module de la transmittance s'écrit :

$$|T(jf)| = \frac{\sqrt{(1+\cos(2\pi \frac{f}{f_e}))^2 + \sin(2\pi \frac{f}{f_e})^2}}{2} = \frac{\sqrt{2+2\cos(2\pi \frac{f}{f_e})}}{2}$$

et l'argument :

$$\varphi = \arg(T(jf)) = -\arctg \left[\frac{\sin(2\pi \frac{f}{f_e})}{1+\cos(2\pi \frac{f}{f_e})} \right]$$

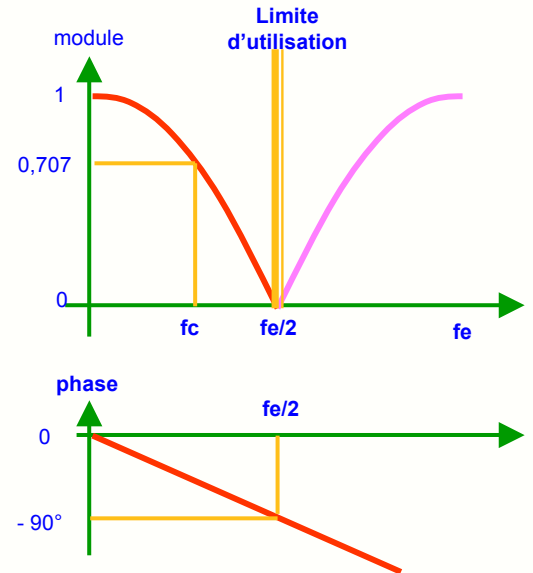


Diagramme de Bode du filtre moyenneur

- la bande des fréquences utiles va de 0 à $f_e/2 = 500$ Hz
- le filtre est un filtre passe-bas
- la fréquence de coupure déterminée graphiquement est d'environ $f_c = 250$ Hz
- la courbe de phase est linéaire



14- Synthèse par la transformée bilinéaire



Il existe différentes techniques possibles pour réaliser des filtre numériques qui répondent à une spécification donnée :

- nous avons déjà vu la méthode par **identification de la réponse indicielle** ou **impulsionnelle**
- la **méthode de la transformée bilinéaire** permet de réaliser le filtre numérique équivalent à un filtre analogique donné
- dans la pratique, les filtres sont élaborés par des **logiciels de synthèse** auxquels il suffit de fournir les caractéristiques souhaitées

Méthode de la transformée bilinéaire :

- on veut réaliser un filtre ayant une fréquence caractéristique f_0
- on calcule une pulsation fictive $\omega_a = \text{tg}(\pi f_0 / f_e)$
- on écrit $T(p)$ du filtre ayant comme pulsation caractéristique ω_a
- on fait $p = (z-1)/(z+1)$ pour obtenir $T(z)$

Exemple : synthèse d'un filtre passe-bas du premier ordre

- fréquence de coupure $f_0 = 1$ kHz
- fréquence d'échantillonnage $f_e = 11$ kHz
- pulsation fictive $\omega_a = \text{tg}(\pi f_0 / f_e) = 0,2936265$

▪ $T(p)$ s'écrit :

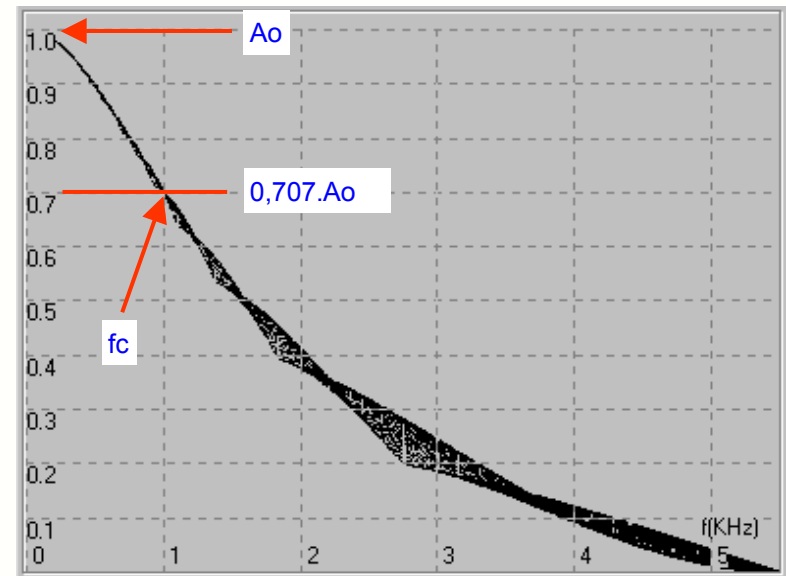
$$T(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_a}} = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot p}$$

▪ $T(z)$ s'écrit :

$$T(z) = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{4,4z - 2,4} = \frac{1+z^{-1}}{4,4 - 2,4 \cdot z^{-1}}$$

▪ d'où l'algorithme :

$$y_n = 0,545 \cdot y_{n-1} + 0,2273 \cdot x_n + 0,2273 \cdot x_{n-1}$$



- la bande des fréquences utiles va de 0 à $f_e/2 = 5500$ Hz
- le filtre est un filtre passe-bas
- la fréquence de coupure est d'environ $f_c = 1000$ Hz
- la transmittance en continu est de $A_0=1$



15- Outils de synthèse de filtres FIR



Ces outils écrits par J. Taft permettent de synthétiser des filtres **passse-bas**, **passse-haut**, **passse-bande** et **réjecteurs** jusqu'au 36ème ordre.

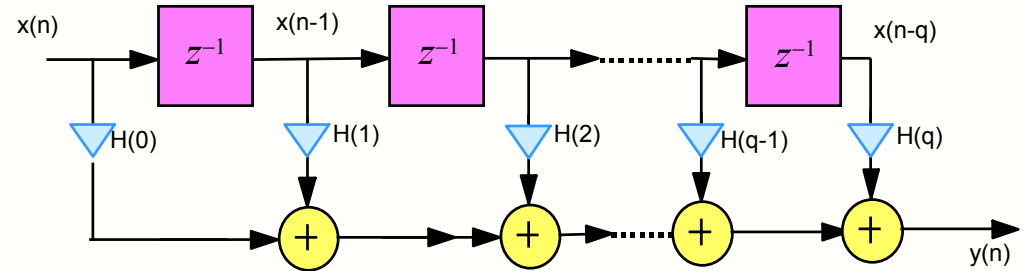
- tous les filtres obtenus sont des **filtres non récursifs** ou à réponse impulsionnelle finie
- pour ces filtres la sortie à un instant donné ne dépend que de l'entrée et des entrées précédentes
- ils sont toujours stables

Algorithme

$$y_n = H(0) \cdot x_n + H(1) \cdot x_{n-1} + \dots + H(i) \cdot x_{n-i}$$

Transmittance

$$T(z) = H(0) + H(1) \cdot z^{-1} + \dots + H(i) \cdot z^{-i}$$



Filtres classiques	Passse-bas	Passse-haut	Passse-bande	Coupe-bande
+ faible ondulation - phase non linéaire, atténuation moyenne	<u>lopass</u>	<u>hipass</u>	<u>bapass</u>	<u>brpass</u>
+ meilleure atténuation - ondulations plus fortes	<u>lopassN</u>	<u>hipassN</u>	<u>bapassN</u>	<u>brpassN</u>
+ phase linéaire, bonne atténuation - transitions assez douces	<u>lopassW</u>	<u>hipassW</u>	<u>bapassW</u>	<u>brpassW</u>
+ phase linéaire, très bonne atténuation	<u>lopassE</u>	<u>hipassE</u>	<u>bapassE</u>	<u>brpassE</u>
Filtres spéciaux	<u>retard et en peigne</u>	<u>réjecteur d'harmoniques</u>	<u>dérivateur</u>	

Fréquence normalisée : $F_c = f_c/f_e$ (passse-bas, passse-haut) et $F_c = f_0/f_e$ (passse-bande, réjecteur)



16- Outils de synthèse de filtres IIR



Ces outils écrits par J. Taft permettent de synthétiser des filtres du 2ème au 12ème ordre par mise en cascade de cellules du 2ème ordre.

Pour une cellule du second ordre :

Algorithme :

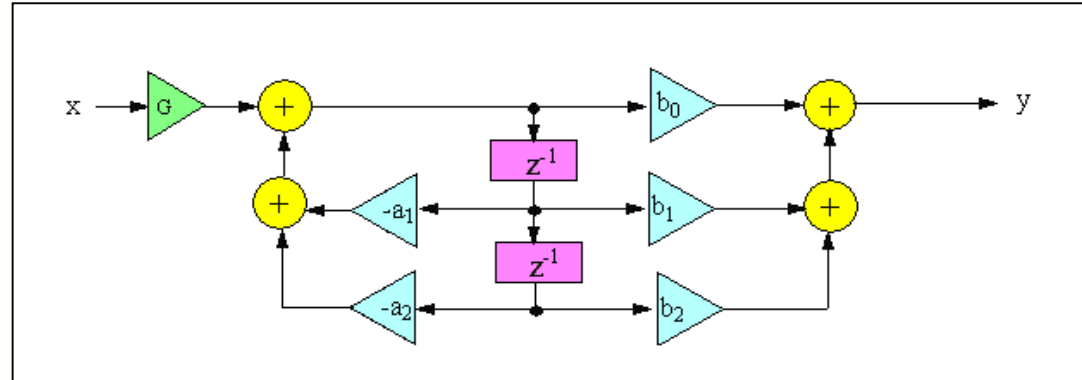
$$y_n = -a_1 \cdot y_{n-1} - a_2 \cdot y_{n-2} + G(b_0 \cdot x_n + b_1 \cdot x_{n-1} + b_2 \cdot x_{n-2})$$

Transmittance :

$$T(z) = G \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$$

Exemple de réalisation en cellule **biquad** :

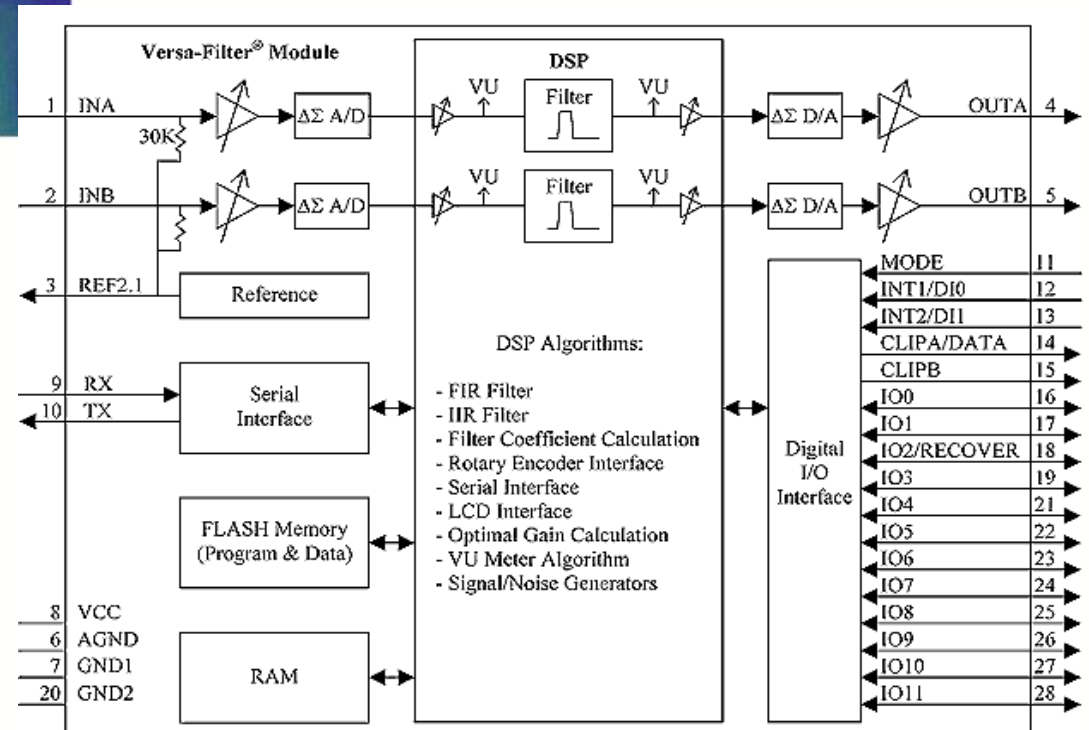
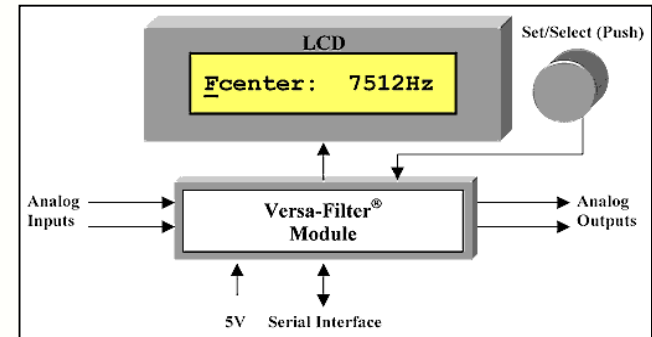
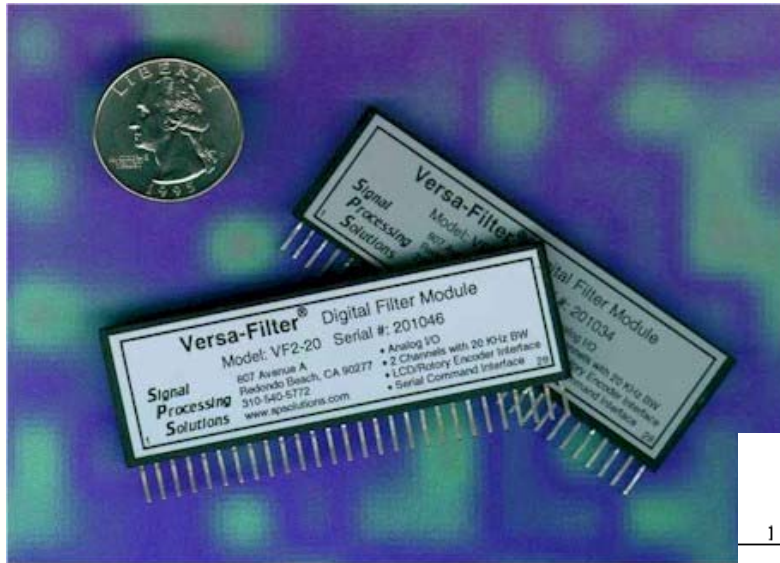
- ne nécessite que 2 mémoires
- structure peu sensible aux arrondis sur les coefficients



Type	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande	Coupe-bande
Butterworth : gain plat dans la bande passante, coupure correcte	lobutter	hibutter	babutter	brbutter
Chebichev : ondulations de gain, mais coupure plus raide	locheby	hicheby	bacheby	brcheby
Cauer : coupure très raide, ondulations de gain paramétrables	locauer	hicauer	bacauer	brcauer

Fréquence normalisée : $F_c = f_c/f_g$ (passe-bas, passe-haut) et $F_c = f_0/f_g$ (passe-bande, réjecteur)

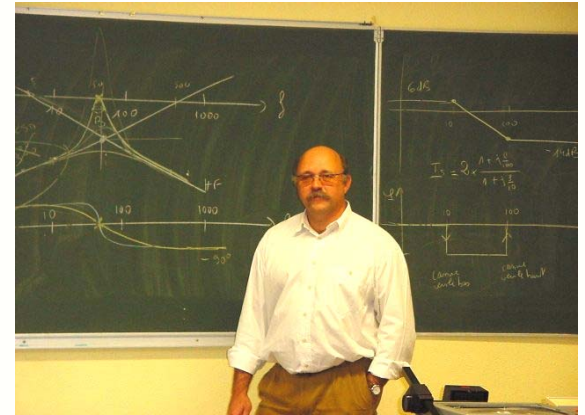
17- Exemple de réalisation de filtre numérique



- module de filtrage numérique
- fréquence maximale $F_{max} = 20$ kHz
- passe-haut, passe-bas, passe-bande, réjecteur
- algorithmes de filtrage en mémoire Flash
- interface pour programmation et afficheur LCD



Parapentistes au Markstein (Vosges)



FIN