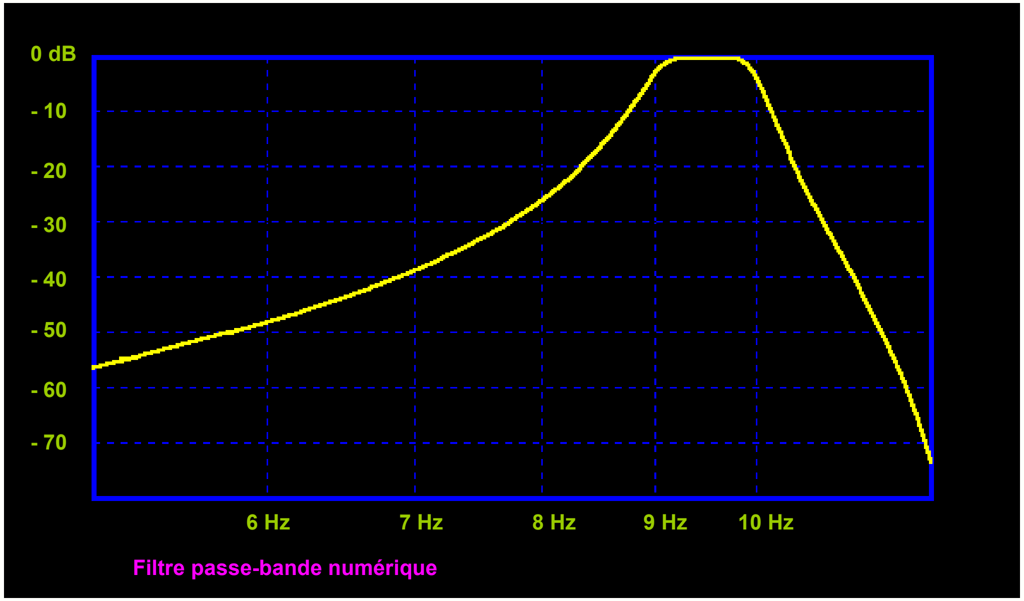
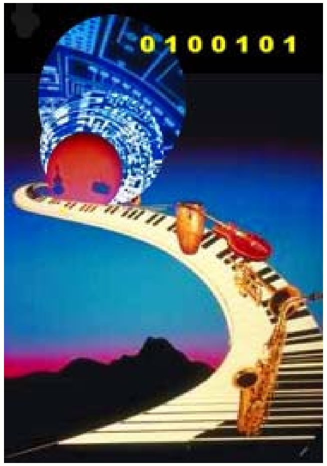
Filtrage numérique



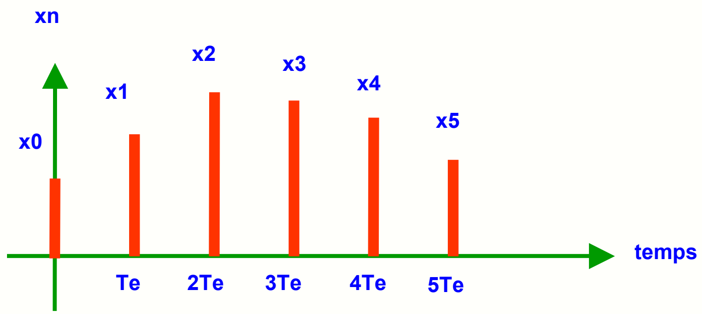


Sommaire

1- Transformée en z d'une séquence binaire
2- Transformées en z des fonctions usuelles
3- Transformée en z ou transformée de Laplace ?
4- Transmittance en z
5- Exemple de synthèse d'un filtre numérique
6- Structure générale d'un filtre numérique
7- Algorithme de calcul et transmittance
8- Exemple de passage de l'algorithme à T(z)
9- Exemple de passage de T(z) à l'algorithme
10- Les deux familles de filtres numériques
11- Stabilité d'un filtre numérique
12- Réponse harmonique
13- Exemple de réponse harmonique
14- Synthèse par la transformée bilinéaire
15- Outils de synthèse de filtres FIR
16- Outils de synthèse de filtres IIR
17- Exemple de réalisation de filtre numérique

1- Transformée en z d'une séquence binaire

Soit une séquence numérique xn constituée des valeurs du signal x(t) échantillonné aux instants t=0, Te, 2Te ...



NB : on suppose dans tout ce cours que le signal x(t) est nul avant t = 0.

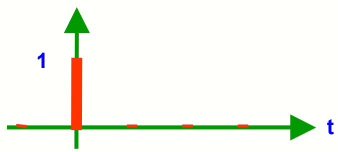
On appelle transformée en z de la séquence numérique xn le polynôme X(z) défini par la relation :

$$X(z)=x_0+x_1.z^{-1}+x_2.z^{-2}+\ldots+x_n.z^{-n}+\ldots$$

Prenons quelques exemples simples :

séquence impulsion unité

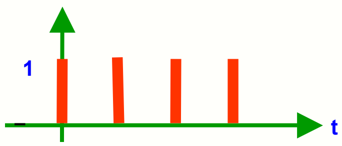
- xn = 0 avant t = 0
- xn = 1 à t = 0
- xn = 0 à Te, 2Te ...



$$X(z)=1$$

séquence échelon unité

- xn = 0 avant t = 0
- xn = 1 à t = 0, Te, 2Te ...



$$X(z)=1+1.z^{-1}+1.z^{-2}+\ldots+1.z^{-n}+\ldots=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

2- Transformées en z des fonctions usuelles

- dans quelques cas particuliers simples, la transformée en z se calcule directement à partir de sa définition
- pour tous les autres cas, on dispose de tables donnant les transformées en z des signaux usuels

$f(t)$	$F(p)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$U(t)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{z}{z-1}$
$a.t$	$\dfrac{a}{p^2}$	$\dfrac{a.Te.z}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$	$\dfrac{z}{z-e^{-aTe}}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{p(p+a)}$	$\dfrac{z(1-e^{-aTe})}{(z-1)(z-e^{-aTe})}$
$e^{-at}\cos(bt)$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\dfrac{z(z-e^{-aTe}\cos bTe)}{z^2-2ze^{-aTe}\cos bTe+e^{-2aTe}}$
$e^{-at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\dfrac{ze^{-aTe}\sin bTe}{z^2-2ze^{-aTe}\cos bTe+e^{-2aTe}}$

3- Transformée en z ou transformée de Laplace ?

En réalité, cette transformée en z n'est rien d'autre qu'une transformée de Laplace cachée :

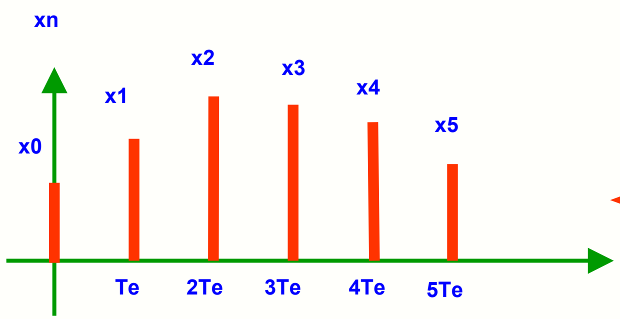
- le signal échantillonné x*(t) peut s'écrire comme une somme d'impulsions de Dirac retardées et d'amplitudes variables :

$$x^*(t)=x_0.\delta(t)+x_1.\delta(t-Te)+x_2.\delta(t-2Te)+\ldots+x_n.\delta(t-nTe)+\ldots$$

- la transformée de Laplace de x*(t) s'écrit alors : $\boxed{X(z)=x_0.1+x_1.1e^{-Tep}+x_2.1e^{-2Tep}+\ldots+x_n.1e^{-nTep}+\ldots}$

- si on pose $\boxed{z=e^{Tep}}$ on retrouve la définition de la transformée en z : $\boxed{X(z)=x_0+x_1.z^{-1}+x_2.z^{-2}+\ldots+x_n.z^{-n}+\ldots}$

La transformée en z d'un signal a donc les mêmes propriétés mathématiques que la transformée de Laplace.



$$\longleftrightarrow \quad X(z) \quad \xleftrightarrow{z=e^{Tep}} \quad X^*(p)$$

- un signal x(t) analogique continu a une transformée de Laplace X(p)
- un signal échantillonné x*(t) a une transformée en z X(z) et une transformée de Laplace X*(p) qu'on utilise rarement
- on passe facilement de X*(p) à X(z) par un simple changement de variable, la transformée en z X(z) étant moins lourde à écrire que X*(p)
- il n'y a pas de passage simple possible entre X(p) et X*(p), mais il existe des tables permettant de passer de X(p) à X*(p) et X(z)

4- Transmittance en z d'un filtre numérique

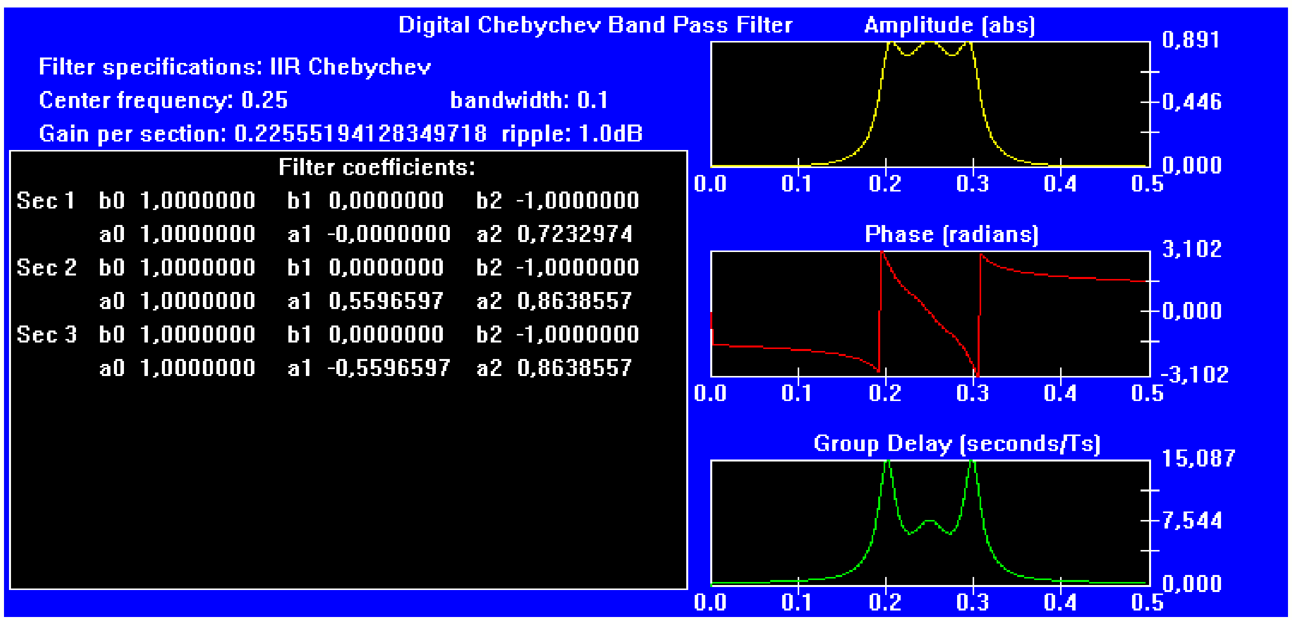
Soit un système qui à une séquence d'entrée xn restitue en sortie une séquence yn :

x0, x1, x2 ... X(z) → **filtre numérique** → y0, y1, y2 … Y(z)

la transmittance T(z) du filtre est alors définie par :

$$\boxed{T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

Puisque les transformées X(z) et Y(z) sont des polynômes contenant les puissances négatives de z, la transmittance sera un rapport de deux polynômes en puissances négatives de z.



Exemple de filtre numérique :

- passe-bande de Chebychev
- 6ème ordre
- fréquence centrale : fo = 0,25.fe
- largeur B = 0,1.fe
- 3 cellules 2ème ordre en cascade
- transmittance T(z)
- T(z) = H1(z).H2(z).H3(z)

$$\boxed{H_1(z) = 0{,}225\frac{1-.z^{-2}}{1+0{,}7233.z^{-2}}}$$

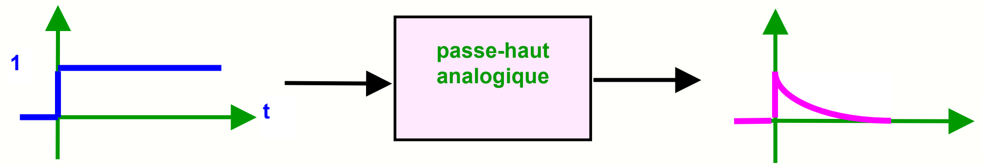
$$\boxed{H_2(z) = 0{,}225\frac{1-.z^{-2}}{1+0{,}56.z^{-1}+0{,}864.z^{-2}}}$$

$$\boxed{H_3(z) = 0{,}225\frac{1-.z^{-2}}{1-0{,}56.z^{-1}+0{,}864.z^{-2}}}$$

5- Exemple de synthèse d'un filtre numérique

Exemple : on se propose de trouver la transmittance d'un filtre passe-haut numérique qui répond à un échelon comme un filtre passe-haut analogique du 1er ordre de constante de temps 10 ms soit de fréquence de coupure fc = 15,9 Hz

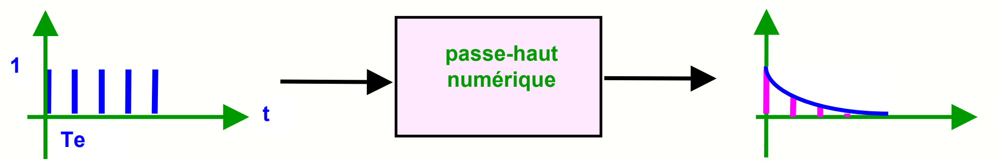
Filtre analogique



$x(t)=1$ $\qquad X(p)=\frac{1}{p}$ $\qquad y(t)=1\,e^{-100.t}$ $\qquad Y(p)=\frac{1}{p+100}$

$$\boxed{T(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{p}{p+100}}$$

Filtre numérique



fe = 1 kHz
Te = 1 ms

$x(nTe)=1$ $\qquad X(z)=\frac{z}{z-1}$ $\qquad y(nTe)=1.e^{-100.n.Te}=1.e^{-0,1n}$ $\qquad Y(z)=\frac{z}{z-0,905}$

$$\boxed{T(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z-1}{z-0,905}}$$

Remarques :

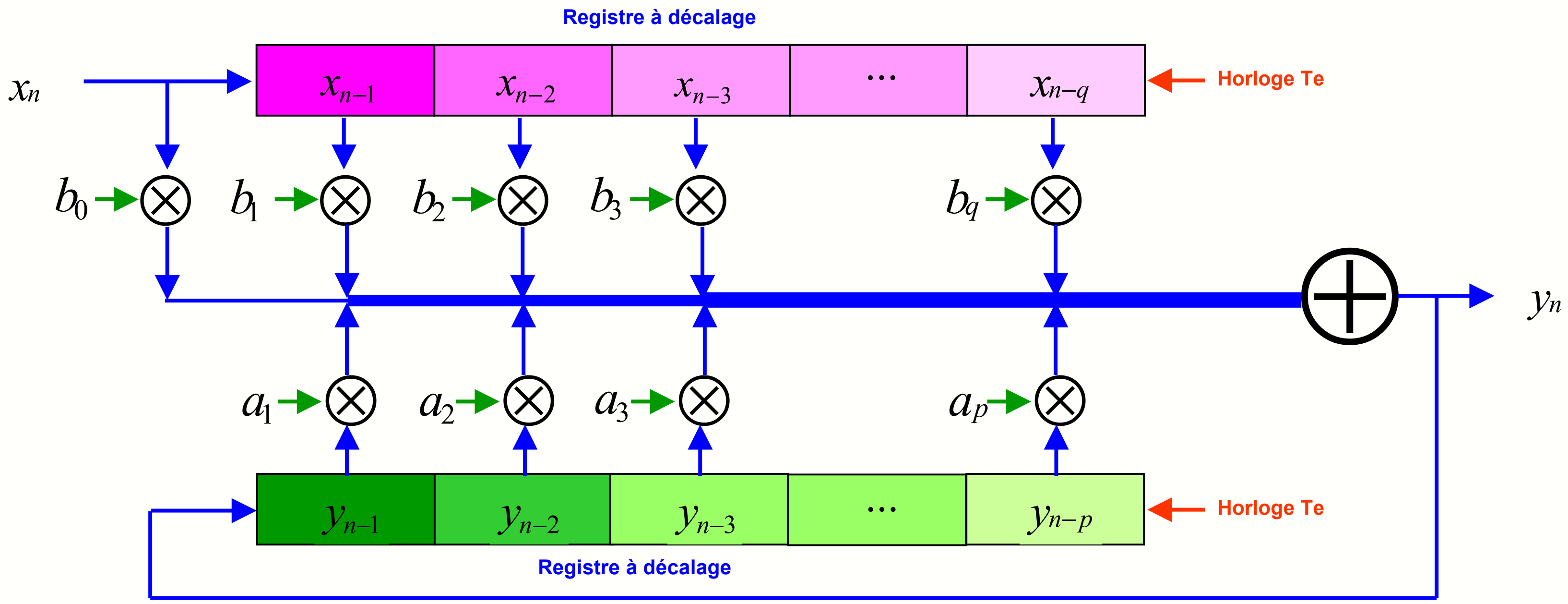
- il est simple de trouver la transmittance d'un filtre numérique qui à une entrée donnée répond par une sortie de forme particulière
- si l'entrée est une impulsion, cette technique s'appelle la méthode de l'identification de la réponse impulsionnelle
- si l'entrée est un échelon, cette technique s'appelle la méthode de l'identification de la réponse indicielle

6- Structure générale d'un filtre numérique

Un filtre numérique calcule la valeur numérique de la sortie yn à l'instant t = nTe à partir des échantillons précédents de la sortie et des échantillons précédents de l'entrée, plus celui qui vient d'être appliqué sur l'entrée xn :

$$\boxed{y_n = a_1 . y_{n-1} + a_2 . y_{n-2} + \ldots + a_p . y_{n-p} + b_0 . x_n + b_1 . x_{n-1} + \ldots + b_q . x_{n-q}}$$

Cette formule de calcul ou algorithme conduit naturellement à la structure générale d'un filtre numérique :

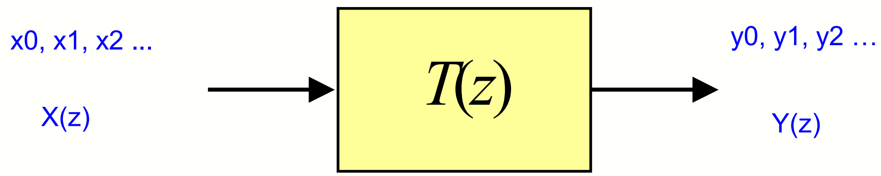


Remarques :

- toutes les Te secondes, les valeurs sont décalées dans les registres, multipliées par leur coefficient respectif et additionnées pour donner yn
- cette structure peut être réalisée sous forme matérielle (registres, multiplicateurs, additionneur) ou entièrement logicielle
- un filtre simple calcule la sortie à partir de quelques échantillons seulement
- au contraire, l'algorithme d'un filtre sophistiqué peut compter jusqu'à une centaine de termes

7- Algorithme de calcul et transmittance T(z)

L'algorithme permet de calculer la valeur de l'échantillon de sortie yn en fonction des échantillons d'entrée et de sortie précédents.



$$\boxed{y_n = a_1.y_{n-1} + a_2.y_{n-2} + \ldots + a_p.y_{n-p} + b_0.x_n + b_1.x_{n-1} + \ldots + b_q.x_{n-q}}$$

La transmittance T(z) permet de synthétiser le filtre, de tracer son diagramme de Bode et d'étudier ses réponses à une impulsion, à un échelon ou à une entrée quelconque.

Pour passer de l'algorithme, relatif au domaine temporel, à la variable z, on utilise la règle de passage très simple :

$$\begin{cases} x_{n-i} \longleftrightarrow X(z).z^{-i} \\ y_{n-i} \longleftrightarrow Y(z).z^{-i} \end{cases}$$

z^{-1}

opérateur retard

- en utilisant cette règle, l'algorithme se transforme en :

$$\boxed{Y(z) = a_1.Y(z).z^{-1} + a_2.Y(z).z^{-2} + \ldots a_p.Y(z).z^{-p} + b_0.X(z) + b_1.X(z).z^{-1} + \ldots + b_q.X(z).z^{-q}}$$

- soit, après factorisation :

$$Y(z)(1 - a_1.z^{-1} - a_2.z^{-2} - \ldots - a_p.z^{-p}) = X(z)(b_0 + b_1.z^{-1} + \ldots + b_q.z^{-q})$$

- ce qui donne la transmittance en z du filtre :

$$\boxed{T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1.z^{-1} + \ldots + b_q.z^{-q}}{1 - a_1.z^{-1} - a_2.z^{-2} - \ldots a_p.z^{-p}}}$$

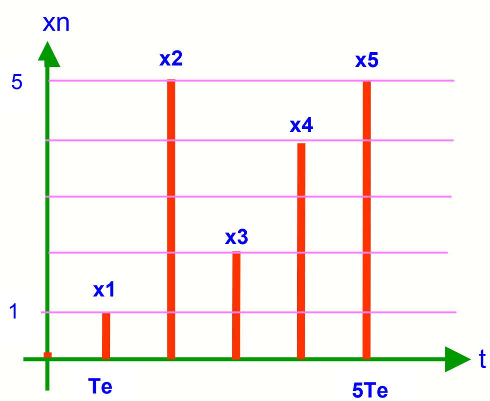
8- Exemple de passage de l'algorithme à T(z)

On souhaite établir la transmittance T(z) du filtre qui effectue la moyenne glissante sur les 4 derniers échantillons arrivés sur l'entrée :

- son algorithme s'écrit :

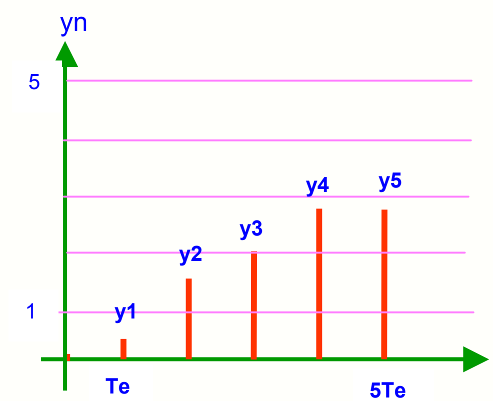
$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}}{4} = 0{,}25.(x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3})$$

- à partir de l'algorithme, il est facile de calculer manuellement les sorties aux instants Te, 2Te … pour observer le comportement du filtre :



Exemple de signal d'entrée

y0 = 0,25.x0 = 0
y1 = 0,25.(x1+x0) = 0,25
y2 = 0,25.(x2+x1+x0) = 1,5
y3 = 0,25.(x3+x2+x1+x0) = 2
y4 = 0,25.(x4+x3+x2+x1) = 2,75
y5 = 0,25.(x5+x4+x3+x2) = 2,75
…



Sortie filtrée

- en utilisant la règle de passage au domaine des « z », l'algorithme se transforme en :

$$Y(z) = 0{,}25.(X(z) + X(z).z^{-1} + X(z).z^{-2} + X(z).z^{-3})$$

- ce qui donne la transmittance en z du filtre :

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0{,}25.(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{4}$$

9- Exemple de passage de T(z) à l'algorithme

On souhaite trouver l'algorithme de calcul du filtre caractérisé par la transmittance T(z) suivante :

x0, x1, x2 ... $\longrightarrow$ $T(z)=\dfrac{1+2.z^{-1}+z^{-3}}{2+z^{-1}}$ $\longrightarrow$ y0, y1, y2 …

- la transmittance est le rapport entre la transformée en z de la sortie et la transformée en z de l'entrée :

$$T(z)=\frac{1+2.z^{-1}+z^{-3}}{2+z^{-1}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

soit , en faisant le produit en croix :

$$(1+2.z^{-1}+z^{-3}).X(z)=(2+z^{-1}).Y(z)$$

- ce qui donne , en isolant Y(z) :

$$2.Y(z)=-Y(z).z^{-1}+X(z)+2.X(z).z^{-1}+X(z)z^{-3}$$

- en utilisant la règle de passage au domaine temporel, l'algorithme s'écrit :

$$2.y_n=-y_{n-1}+x_n+2.x_{n-1}+x_{n-2}$$

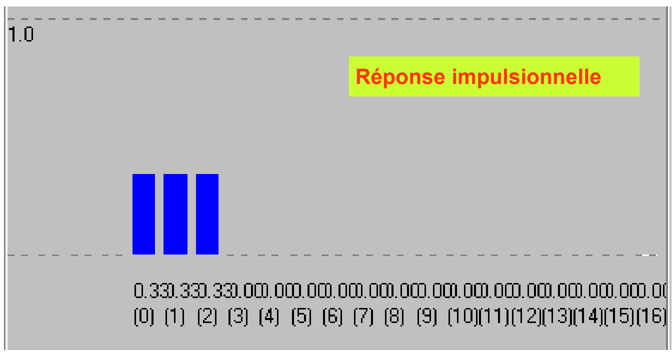
- soit, enfin :

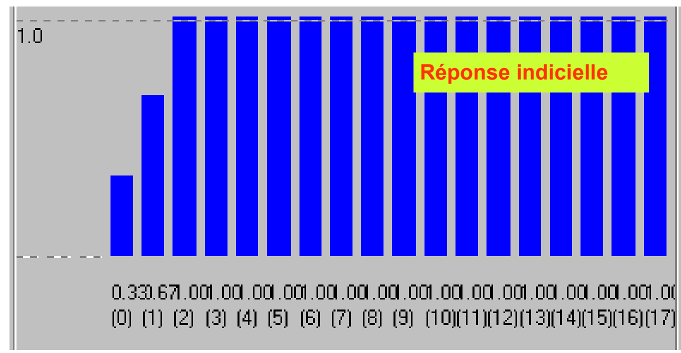
$$\boxed{y_n=-0,5.y_{n-1}+0,5.x_n+x_{n-1}+0,5.x_{n-2}}$$

10- Les deux familles de filtres numériques

Suivant la forme de l'algorithme, on distingue deux grandes familles de filtres qui ont chacune leurs propriétés particulières :

- filtres pour lesquels la sortie ne dépend que des entrées et pas des sorties
- leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un certain temps
- ils s'appellent filtres non récursifs ou à réponse impulsionnelle finie (FIR)
- ils n'ont pas d'équivalent analogique

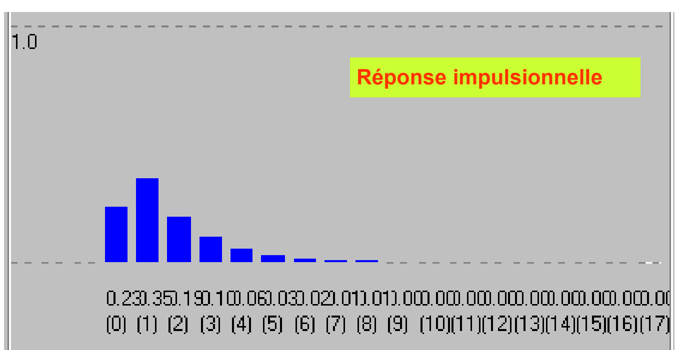


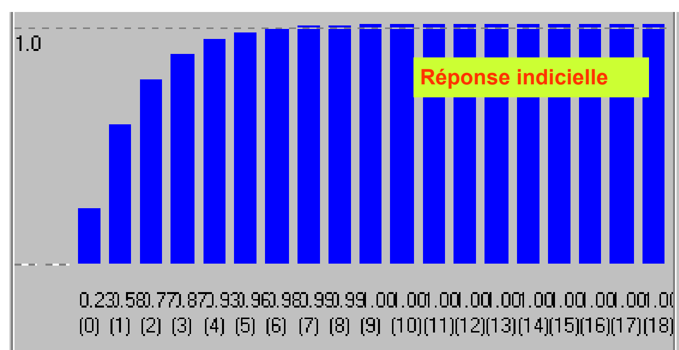


Filtre à moyenne glissante

$$y_n=\frac{1}{3}(x_n+x_{n-1}+x_{n-2})$$

- filtres pour lesquels la sortie dépend des entrées et des sorties précédentes
- leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un temps infini
- ils s'appellent filtres récursifs ou à réponse impulsionnelle infinie (IIR)





Passe-bas du premier ordre

$$y_n=0,5.y_{n-1}+0,25.(x_n+x_{n-1})$$

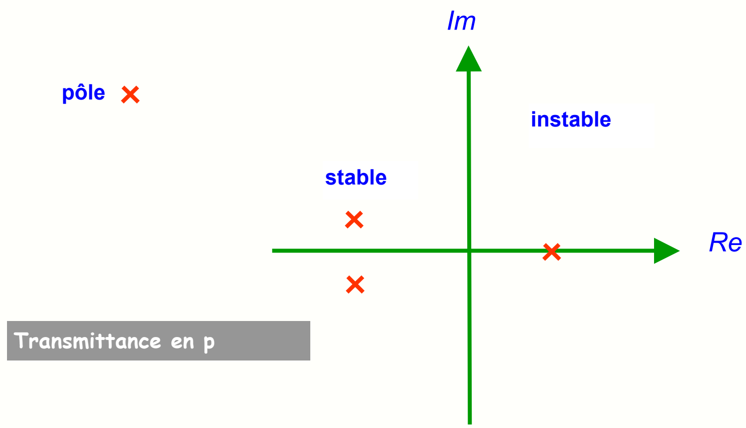
11- Stabilité d'un filtre numérique

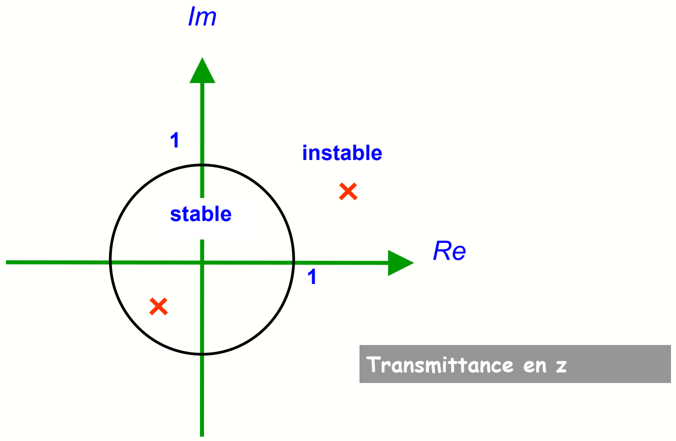
Comme pour les filtres analogiques, il est possible de prévoir la stabilité à partir de la transmittance du système.

Rappel : un système de transmittance T(p) est stable si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

Ce critère de stabilité reste valable pour les transmittances T*(p) des systèmes échantillonnés :

- un système stable aura des pôles pi à partie réelle négative : $p_i = a_i + j.b_i$ avec $a_i \leq 0$
- la valeur de z correspondant à ce pôle s'écrit : $\boxed{z_i = e^{Te.p_i} = e^{Te(a_i + j.b_i)} = e^{Tea_i}\left[\cos(b_i) + j\sin(b_i)\right]}$
- si le système est stable, le module de ce nombre complexe est tel que : $|z_i| = e^{Tea_i} \leq 1$ puisque $a_i \leq 0$





Critère de stabilité : un système échantillonné de transmittance T(z) est stable si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

12- Réponse harmonique d'un filtre numérique

Pour représenter la courbe de gain et de phase d'un filtre, il faut étudier sa transmittance complexe et il faut donc passer de T(z) à $\underline{T}(jw)$:

$$T(z)=\frac{b_0+b_1.z^{-1}+...+b_q.z^{-q}}{1-a_1.z^{-1}-a_2.z^{-2}-...a_p.z^{-p}} \xrightarrow{z=e^{Tep}=e^{j\omega Te}} \underline{T}(z)=\frac{b_0+b_1.e^{-j\omega Te}+...+b_q.e^{-jq\omega Te}}{1-a_1.e^{-j\omega Te}-a_2.e^{-j2\omega Te}-...a_p.e^{-jp\omega Te}}$$

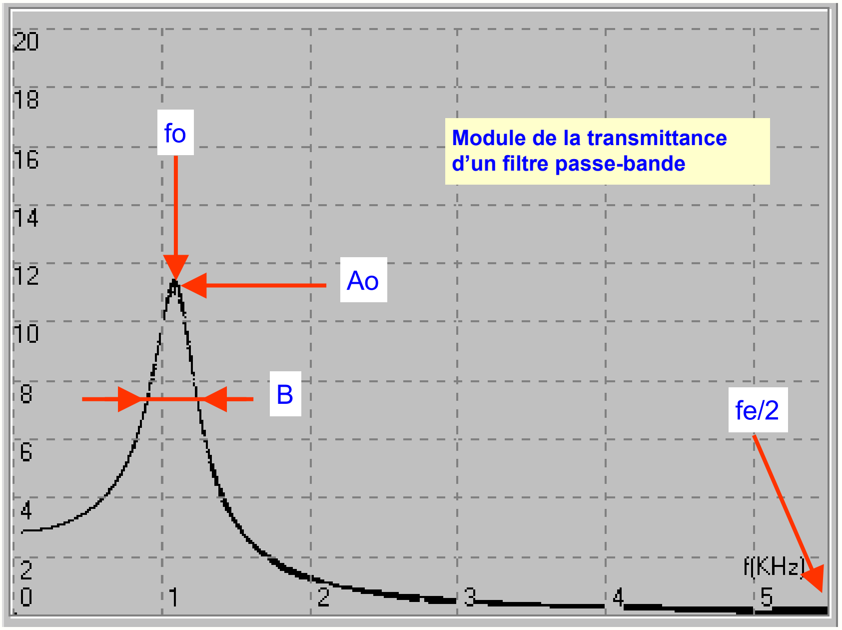
- l'expression obtenue pour la transmittance comporte des exponentielles complexes
- elle est donc assez lourde à manipuler mathématiquement
- le calcul du module et de la phase de la transmittance mène souvent à des calculs fastidieux
- des logiciels de simulation permettent d'arriver rapidement à la courbe de réponse

Exemple de simulation :

- algorithme du filtre

$$y_n=1,5.y_{n-1}-0,85.y_{n-2}+x_n$$

- filtre passe-bande
- fréquence d'échantillonnage fe = 11 kHz
- fréquence centrale fo = 1,1 kHz
- amplification maximale Ao = 11,2
- bande passante B = 200 Hz
- coefficient de qualité Q = fo/B = 5,5



13- Exemple de réponse harmonique

On s'intéresse à un filtre moyenneur sur deux valeurs, la fréquence d'échantillonnage étant de fe = 1 kHz :

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

$$T(z) = \frac{1+z^{-1}}{2} \xrightarrow{z=e^{Tep}=e^{j\omega Te}} \underline{T}(j\omega) = \frac{1+e^{-j\omega Te}}{2} = \frac{1+\cos(\omega Te) - j\sin(\omega Te)}{2}$$

- on travaille plus volontiers avec la fréquence f :

$$\underline{T}(jf) = \frac{1+\cos(2\pi\frac{f}{fe}) - j\sin(2\pi\frac{f}{fe})}{2}$$

- le module de la transmittance s'écrit :

$$|\underline{T}(jf)| = \frac{\sqrt{\left(1+\cos(2\pi\frac{f}{fe})\right)^2 + \sin(2\pi\frac{f}{fe})^2}}{2} = \frac{\sqrt{2+2\cos(2\pi\frac{f}{fe})}}{2}$$

- et l'argument :

$$\varphi = \arg(\underline{T}(jf)) = -arctg\left[\frac{\sin(2\pi\frac{f}{fe})}{1+\cos(2\pi\frac{f}{fe})}\right]$$

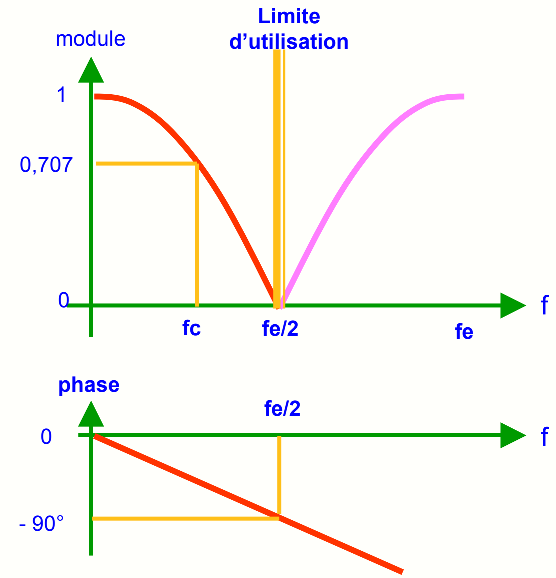


Diagramme de Bode du filtre moyenneur

- la bande des fréquences utiles va de 0 à fe/2 = 500 Hz
- le filtre est un filtre passe-bas
- la fréquence de coupure déterminée graphiquement est d'environ fc = 250 Hz
- la courbe de phase est linéaire

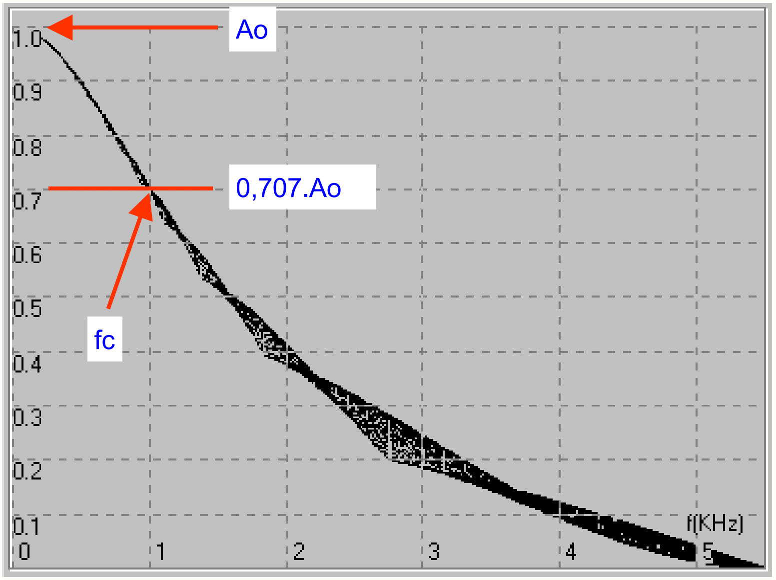
14- Synthèse par la transformée bilinéaire

Il existe différentes techniques possibles pour réaliser des filtre numériques qui répondent à une spécification donnée :

- nous avons déjà vu la méthode par identification de la réponse indicielle ou impulsionnelle
- la méthode de la transformée bilinéaire permet de réaliser le filtre numérique équivalent à un filtre analogique donné
- dans la pratique, les filtres sont élaborés par des logiciels de synthèse auxquels il suffit de fournir les caractéristiques souhaitées

Méthode de la transformée bilinéaire :

- on veut réaliser un filtre ayant une fréquence caractéristique fo
- on calcule une pulsation fictive $\omega a = tg(\pi fo/fe)$
- on écrit T(p) du filtre ayant comme pulsation caractéristique ωa
- on fait $p = (z-1)/(z+1)$ pour obtenir T(z)



Exemple : synthèse d'un filtre passe-bas du premier ordre

- fréquence de coupure fo = 1 kHz
- fréquence d'échantillonnage fe = 11 kHz
- pulsation fictive $\omega a = tg(\pi fo/fe) = 0{,}2936265$

- T(p) s'écrit : $$T(p)=\frac{1}{1+\frac{p}{\omega a}}=\frac{1}{1+3{,}4.p}$$

- T(z) s'écrit : $$T(z)=\frac{1}{1+3{,}4.\frac{z-1}{z+1}}=\frac{z+1}{4{,}4z-2{,}4}=\frac{1+z^{-1}}{4{,}4-2{,}4.z^{-1}}$$

- d'où l'algorithme : $$y_n=0{,}545.y_{n-1}+0{,}2273.x_n+0{,}2273.x_{n-1}$$

- la bande des fréquences utiles va de 0 à fe/2 = 5500 Hz
- le filtre est un filtre passe-bas
- la fréquence de coupure est d'environ fc = 1000 Hz
- la transmittance en continu est de Ao=1

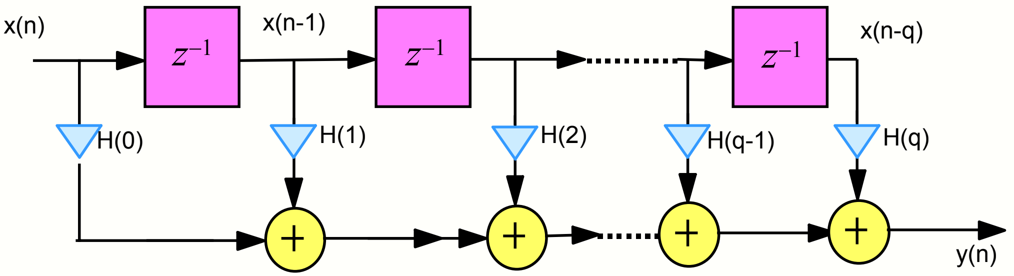
15- Outils de synthèse de filtres FIR

Ces outils écrits par J. Taft permettent de synthétiser des filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et réjecteurs jusqu'au 36ème ordre.

- tous les filtres obtenus sont des filtres non récursifs ou à réponse impulsionnelle finie
- pour ces filtres la sortie à un instant donné ne dépend que de l'entrée et des entrées précédentes
- ils sont toujours stables

Algorithme $y_n = H(0).x_n + H(1).x_{n-1} + \ldots + H(i).x_{n-i}$

Transmittance $T(z) = H(0) + H(1).z^{-1} + \ldots + H(i).z^{-i}$



Filtres classiques	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande	Coupe-bande
+ faible ondulation - phase non linéaire, atténuation moyenne	lopass	hipass	bapass	brpass
+ meilleure atténuation - ondulations plus fortes	lopassN	hipassN	bapassN	brpassN
+ phase linéaire, bonne atténuation - transitions assez douces	lopassW	hipassW	bapassW	brpassW
+ phase linéaire, très bonne atténuation	lopassE	hipassE	bapassE	brpassE
Filtres spéciaux	retard et en peigne	réjecteur d'harmoniques	dérivateur	

Fréquence normalisée : **Fc = f_c/f_e** (passe-bas, passe-haut) et **Fc = f_0/f_e** (passe-bande, réjecteur)

16- Outils de synthèse de filtres IIR

Ces outils écrits par J. Taft permettent de synthétiser des filtres du 2ème au 12ème ordre par mise en cascade de cellules du 2ème ordre.

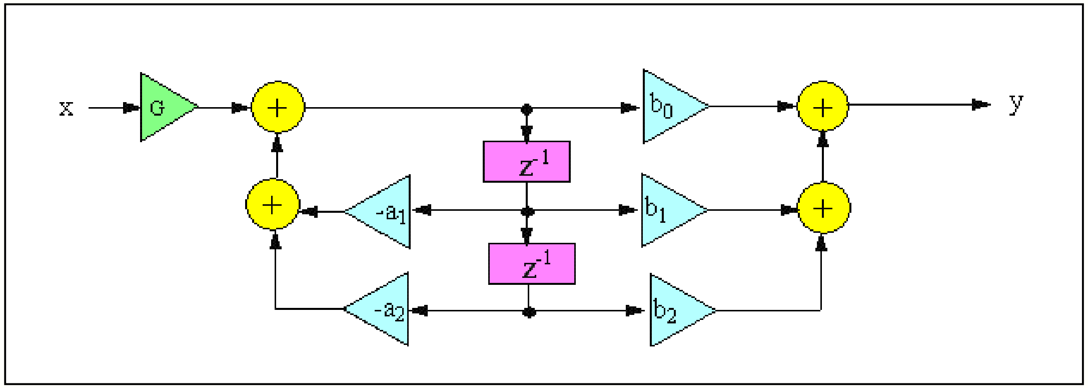
Pour une cellule du second ordre :

Algorithme : $y_n = -a_1.y_{n-1} - a_2.y_{n-2} + G(b_0.x_n + b_1.x_{n-1} + b_2.x_{n-2})$

Transmittance : $T(z) = G\dfrac{b_0 + b_1.z^{-1} + b_2.z^{-2}}{1 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2}}$

Exemple de réalisation en cellule **biquad** :

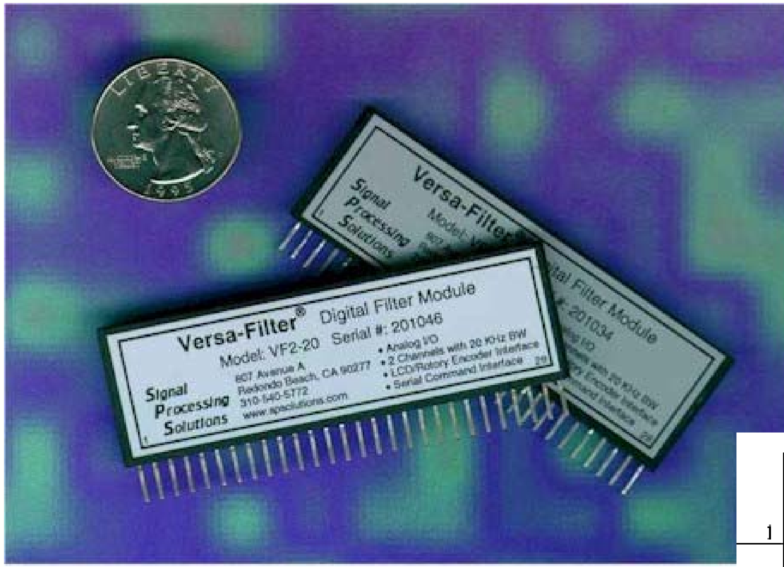
- ne nécessite que 2 mémoires
- structure peu sensible aux arrondis sur les coefficients

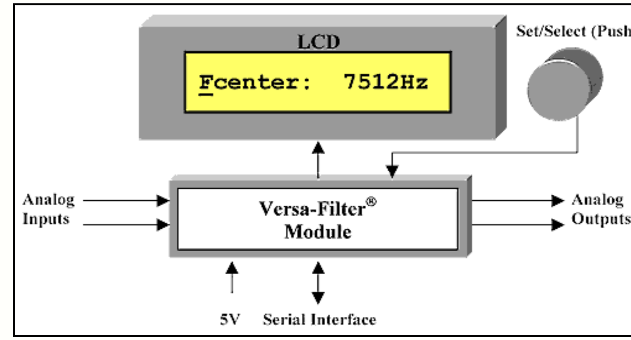


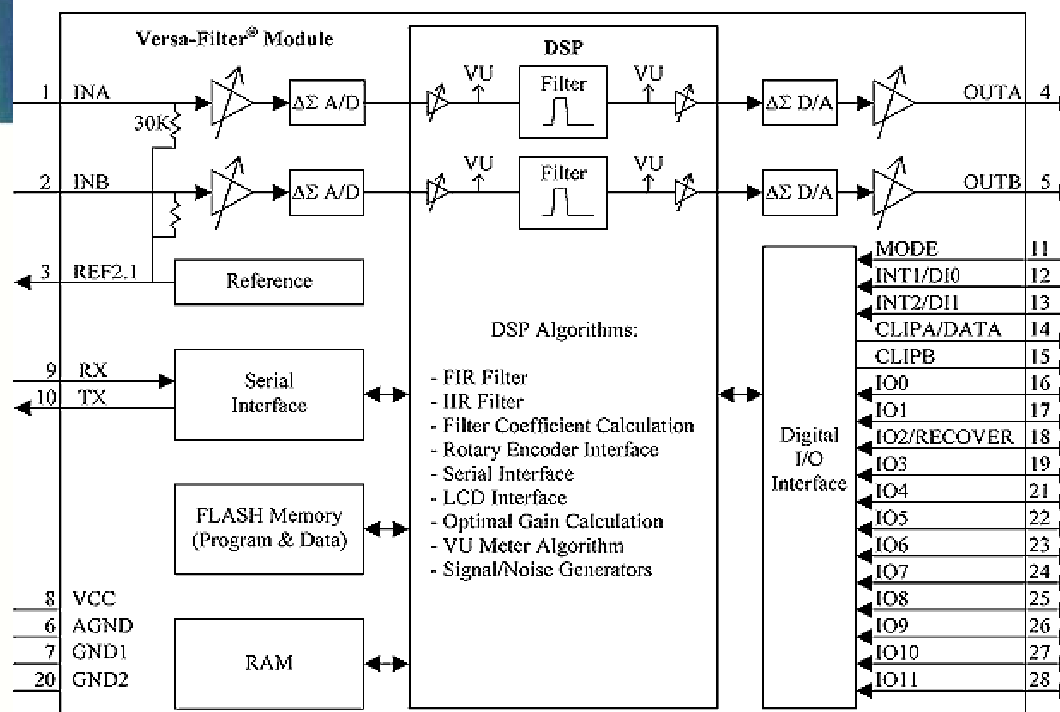
Type	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande	Coupe-bande
Butterworth : gain plat dans la bande passante, coupure correcte	lobutter	hibutter	babutter	brbutter
Chebichev : ondulations de gain, mais coupure plus raide	locheby	hicheby	bacheby	brcheby
Cauer : coupure très raide, ondulations de gain paramétrables	locauer	hicauer	bacauer	brcauer

Fréquence normalisée : $Fc = f_c/f_e$ (passe-bas, passe-haut) et $Fc = f_0/f_e$ (passe-bande, réjecteur)

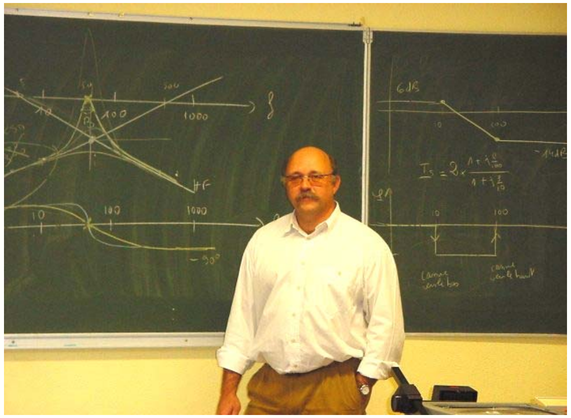
17- Exemple de réalisation de filtre numérique







- module de filtrage numérique
- fréquence maximale Fmax = 20 kHz
- passe-haut, passe-bas, passe-bande, réjecteur
- algorithmes de filtrage en mémoire Flash
- interface pour programmation et afficheur LCD



Parapentistes au Markstein (Vosges)

FIN