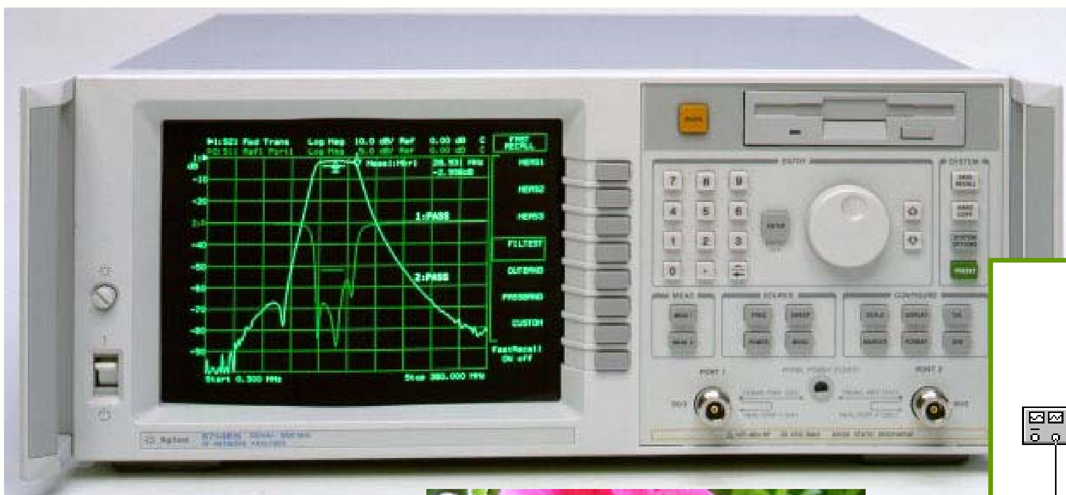
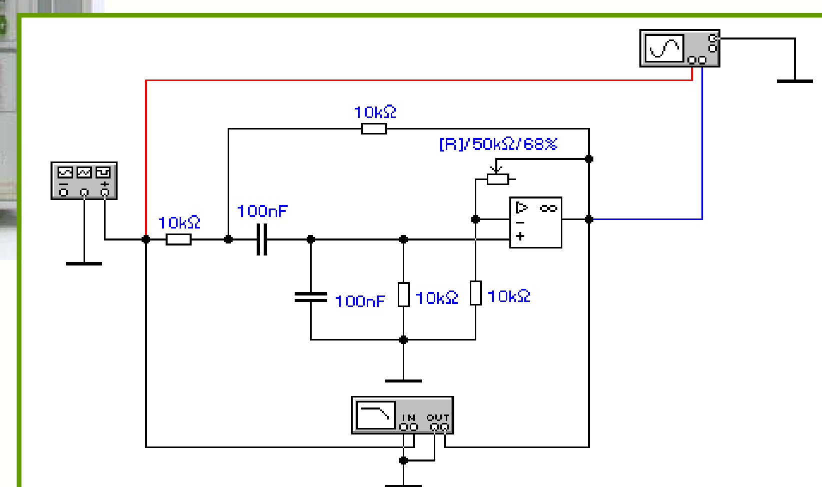
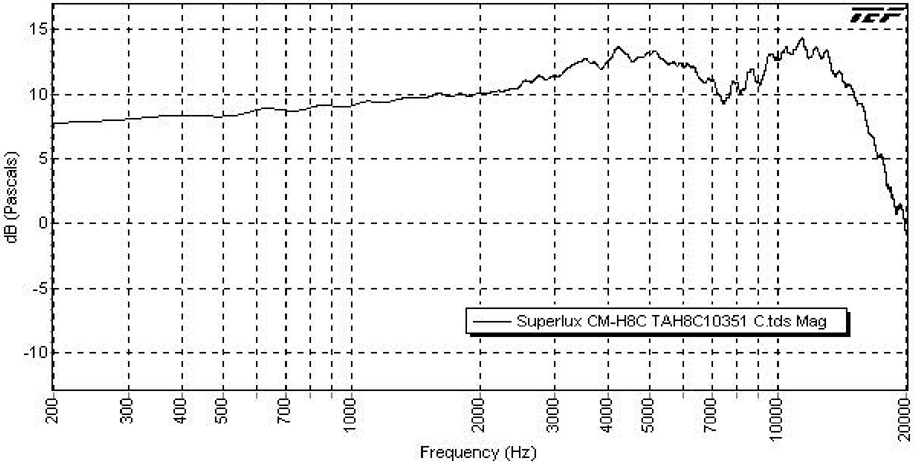
Les diagrammes de Bode





jean-philippe muller

Sommaire



dB (Pascals)
15
10
5
0
-5
-10
Superlux CM-H8C TAH8C10351 C.tds Mag
200
300
400
500
700
1000
2000
3000
4000
5000
7000
10000
20000
Frequency (Hz)

1- Courbe de réponse en fréquence d'un système

La courbe de réponse en fréquence d'un système est la représentation en fonction de la fréquence de l'amplitude et de la phase du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

entrée e(t) → **système physique** → sortie s(t)

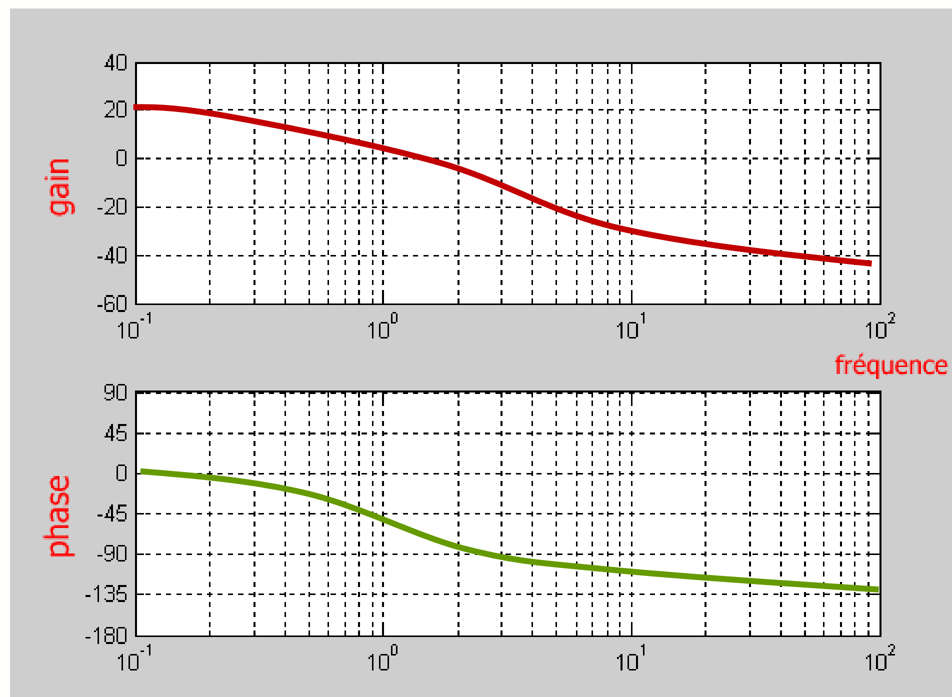
- signal sinusoïdal
- amplitude E constante
- phase prise comme référence

- signal sinusoïdal
- amplitude S
- déphasage φ par rapport à e(t)

- la courbe de gain traduit les variations de l'amplitude de s(t)
- le gain s'exprime en dB

$$G_{dB}=20\log\left(\frac{S}{E}\right)$$

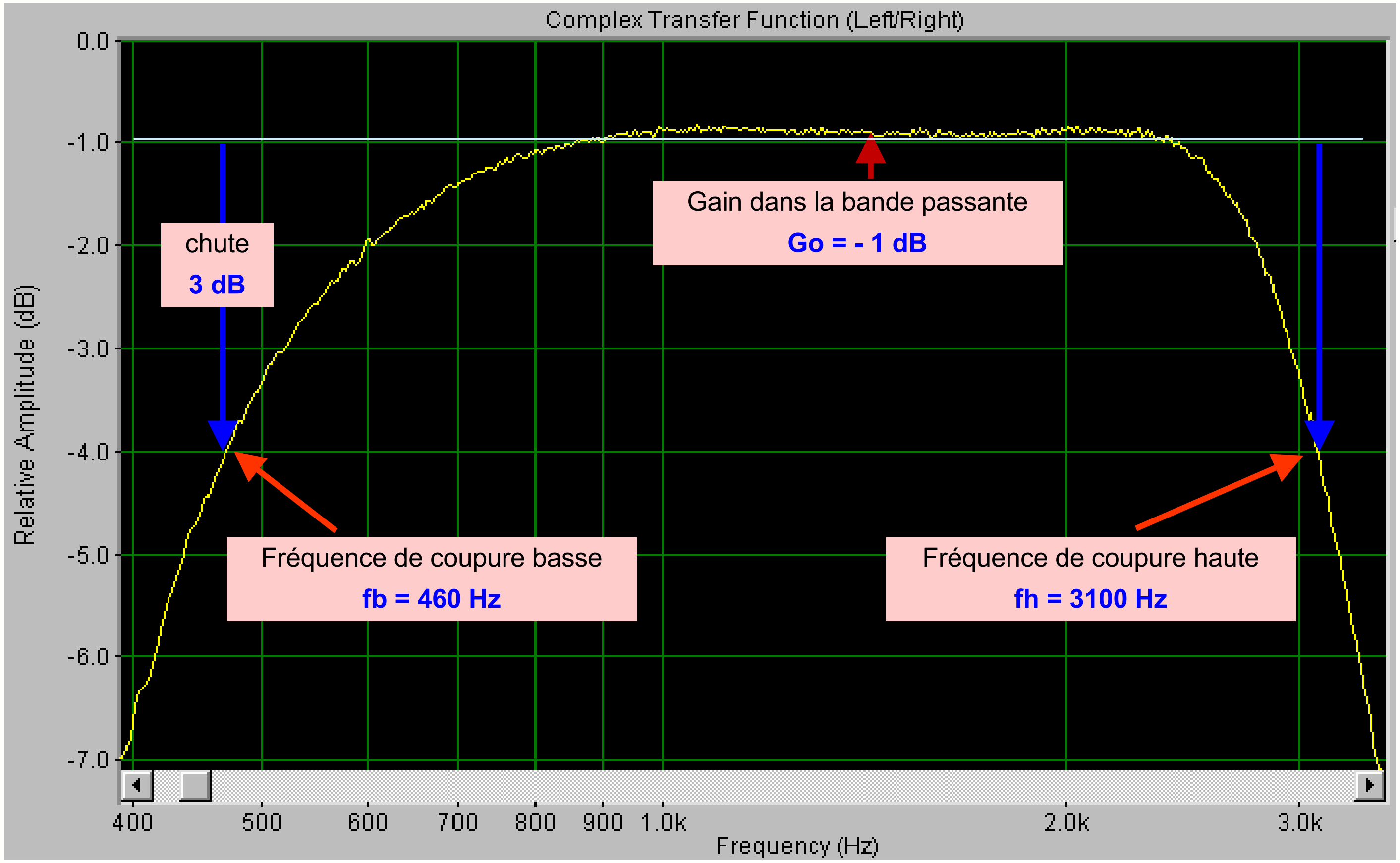
- la courbe de phase traduit le déphasage de s(t) par rapport à e(t)
- la phase s'exprime en degrés ou en radians



2- Intérêt de la courbe de réponse en fréquence

La courbe de réponse en fréquence :

- montre l'aptitude d'un dispositif (microphone, amplificateur, haut-parleur) à reproduire les fréquences souhaitées
- permet de déterminer la bande passante du système toujours définie lorsque le gain a diminué de 3 dB
- met en évidence la capacité d'un filtre à sélectionner les fréquences désirées et à éliminer les fréquences gênantes
- montre les déphasages introduits par le dispositif en fonction de la fréquence

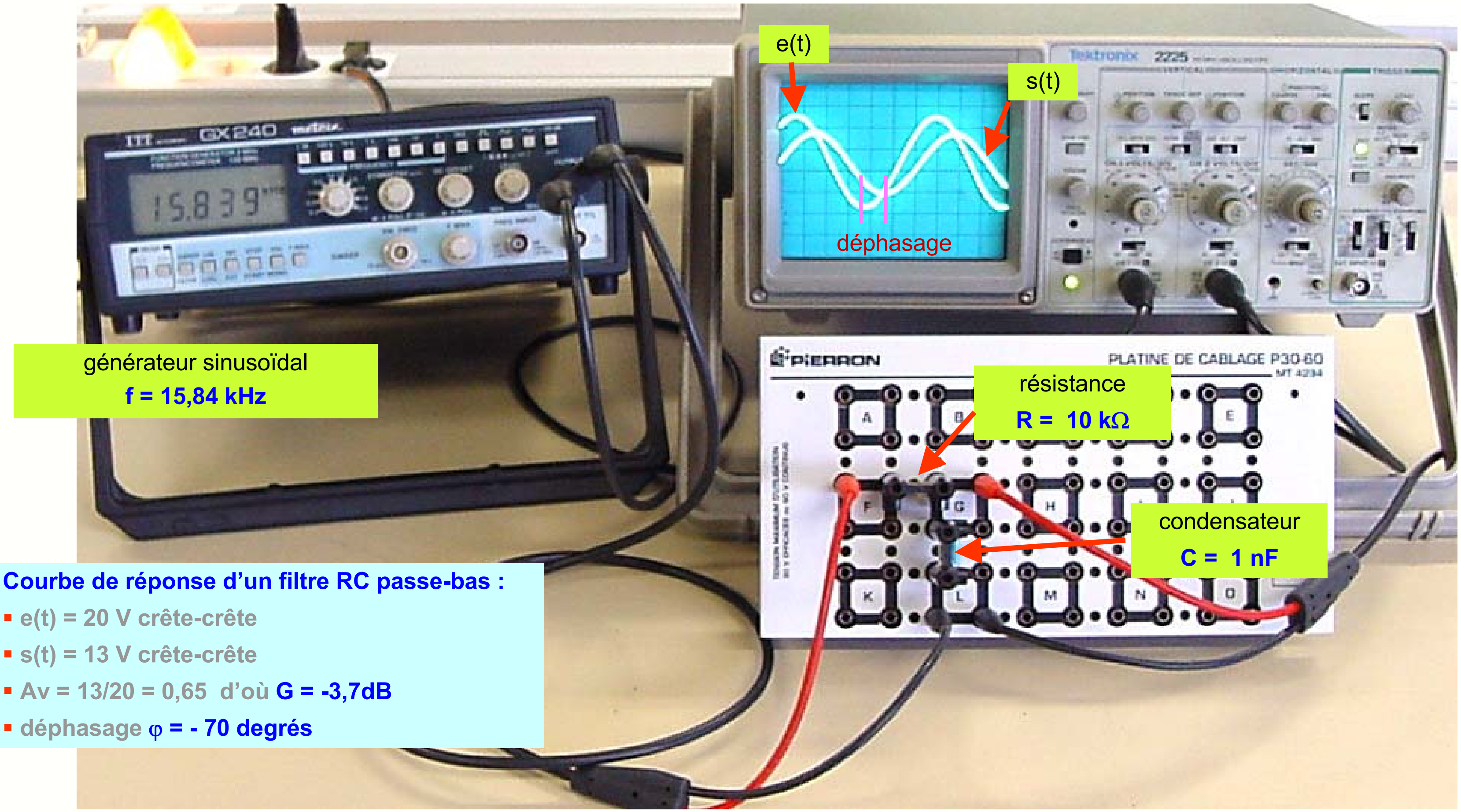


Filtre pour haut-parleur Médium

3- Relevé expérimental à l'oscilloscope

La courbe de réponse en fréquence d'un système être obtenue par **relevé expérimental**, par **simulation** à partir de son schéma ou par **tracé du diagramme de Bode** de sa transmittance complexe.

L'oscilloscope permet de mesurer, avec une précision moyenne, les amplitudes des signaux d'entrée et de sortie, ainsi que leur déphasage.



Courbe de réponse d'un filtre RC passe-bas :

- **e(t) = 20 V crête-crête**
- **s(t) = 13 V crête-crête**
- **Av = 13/20 = 0,65 d'où G = -3,7dB**
- **déphasage φ = - 70 degrés**

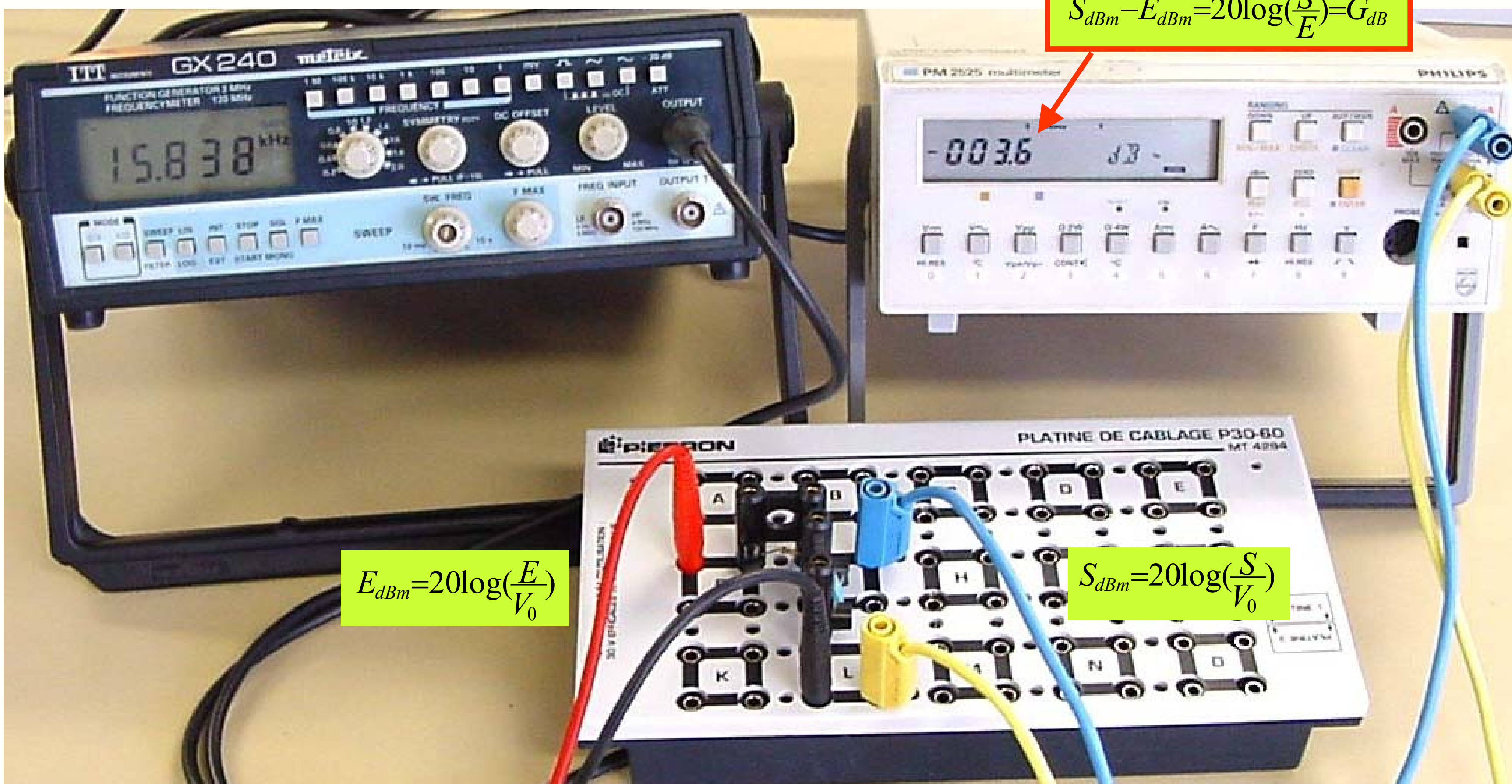
4- Relevé expérimental au voltmètre

Souvent on ne s'intéresse qu'à la courbe de gain, et l'utilisation d'un voltmètre avec affichage des dB facilite le relevé :

- sur la position dB, le voltmètre affiche la tension entre les points de mesure en dBm
- la tension de référence Vo vaut en général 0,775 V (1 mW sur 600 Ω)
- si on branche l'appareil à l'entrée, la valeur E en dBm peut être mémorisée
- si on branche l'appareil sur la sortie, il indique alors la différence S-E, c'est-à-dire le gain

$$V_{dBm} = 20\log\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$S_{dBm} - E_{dBm} = 20\log\left(\frac{S}{E}\right) = G_{dB}$$



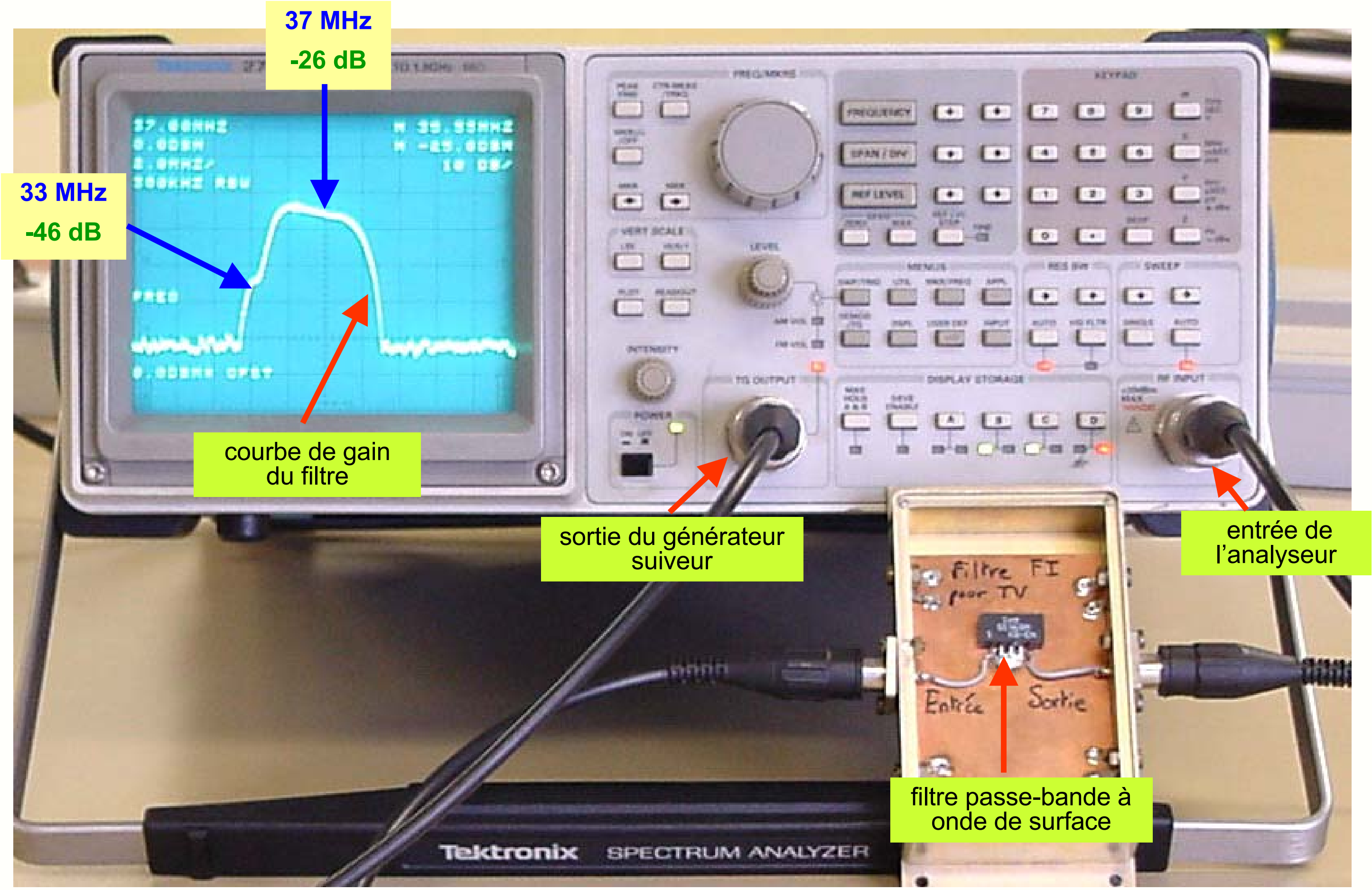
$$E_{dBm} = 20\log\left(\frac{E}{V_0}\right)$$

$$S_{dBm} = 20\log\left(\frac{S}{V_0}\right)$$

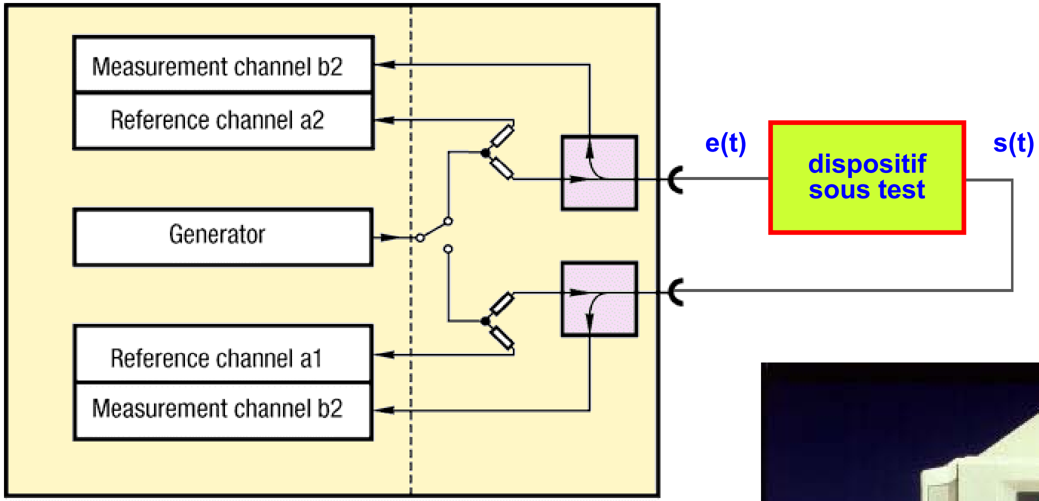
5- Relevé expérimental à l'analyseur de spectre

Un analyseur de spectre équipé de son générateur suiveur (tracking) est un outil très pratique pour relever la courbe de réponse :

- le générateur suiveur fournit un signal sinusoïdal dont la fréquence varie en fonction du balayage de l'analyseur
- le signal fourni par le suiveur est injecté dans le dispositif à tester et la sortie est analysée par l'analyseur de spectre
- la courbe de réponse en fréquence s'affiche sur l'écran de l'analyseur

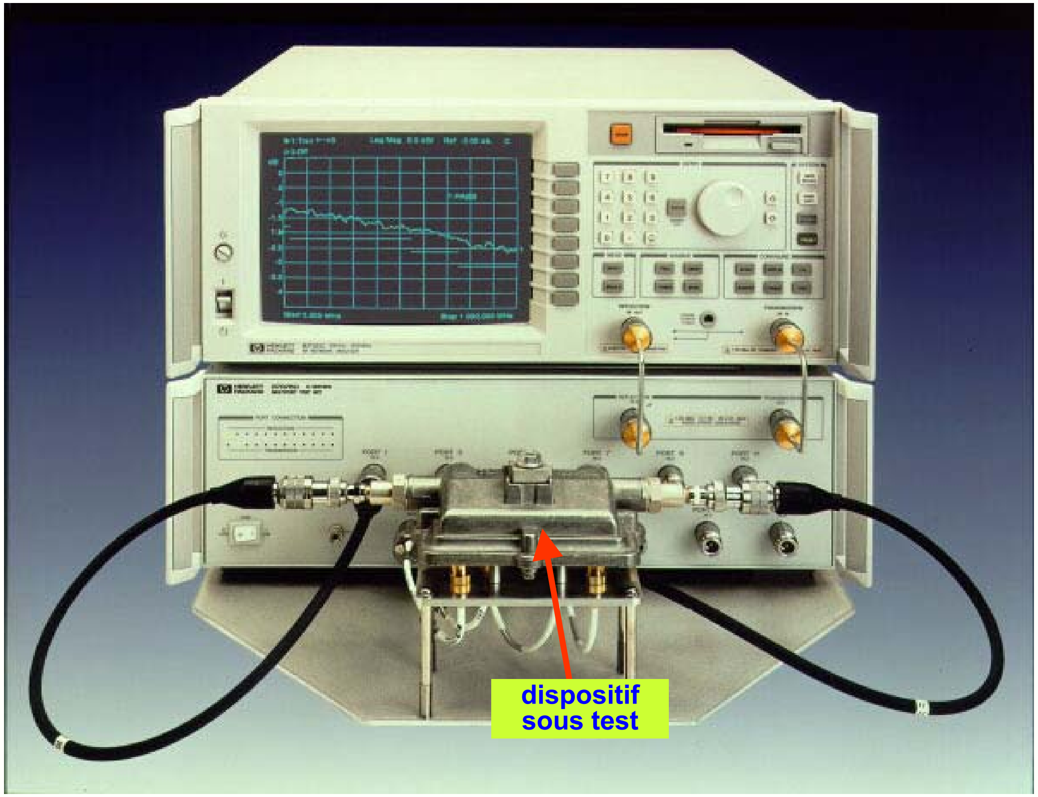


6- Relevé expérimental à l'analyseur de réseau



Analyseur de réseau Agilent 8712

300 kHz – 3 GHz



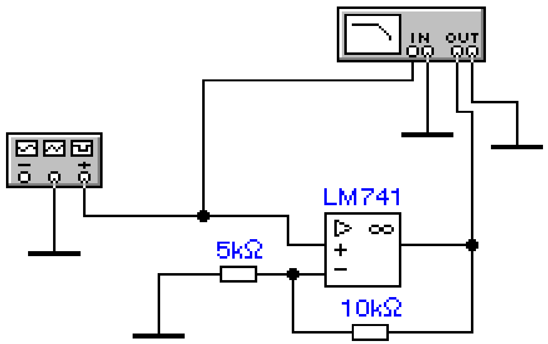
L'analyseur de réseau est l'outil moderne qui permet de caractériser les dispositifs électroniques :

- son générateur couvre une gamme très large allant de **quelques kHz** à **plusieurs GHz**
- les voltmètres intégrés mesurent les niveaux et les phases des signaux
- l'appareil affiche les courbes de **gain** et de **phase**
- il permet aussi de mesurer les **impédances d'entrée** et **de sortie** en vue de l'adaptation

7- Simulation de la courbe de réponse

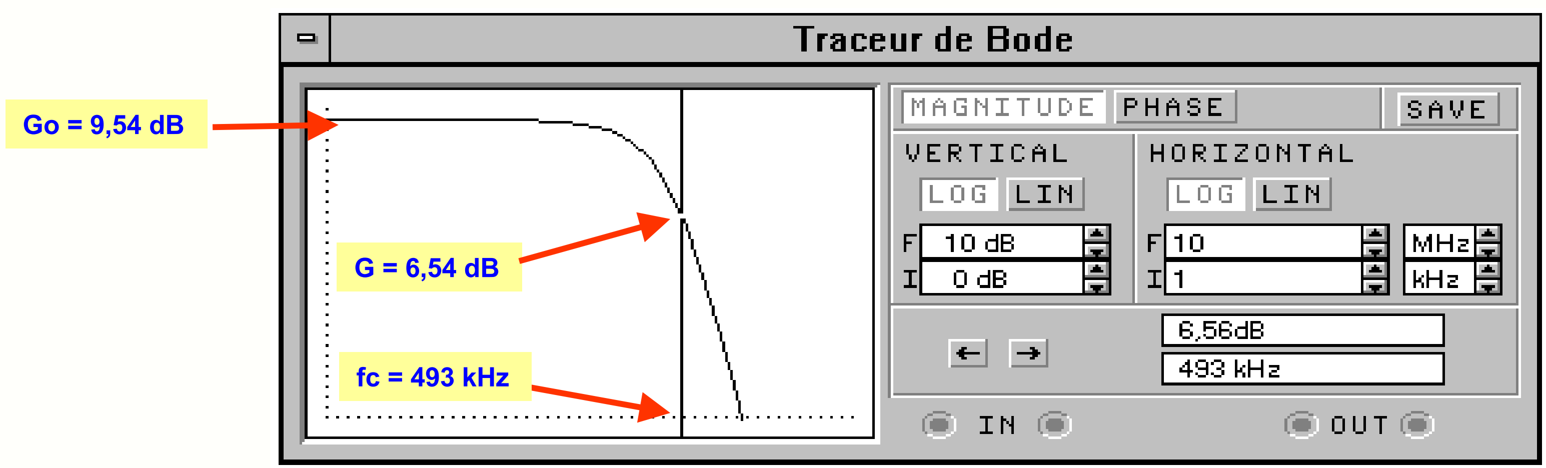
Les nombreux logiciels de conception présents sur le marché permettent tous de simuler la réponse en fréquence d'un système.

La simulation d'un **amplificateur non-inverseur** construit à l'aide d'un amplificateur opérationnel du type **741** donne les résultats suivants :



$$\boxed{Av = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 3 = 9{,}54 dB}$$

- le gain aux basses-fréquences vaut **Go = 9,54 dB**
- la fréquence de coupure est définie lorsque le gain a chuté de 3 dB, soit à **G = 6,54 dB**
- les indications du curseur montrent que ce gain est obtenu à la fréquence **fc = 493 kHz**



8- Le physicien H. W. Bode

- l'étude d'un circuit électronique à l'aide des lois d'Ohm permet d'établir sa **transmittance** qui peut s'écrire par exemple :

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}(1+j\frac{\omega}{\omega_2})}{(1+j\frac{\omega}{\omega_1})(1+j\frac{\omega}{\omega_3})(1+2mj\frac{\omega}{\omega_4}-\frac{\omega^2}{\omega_4^2})}$$

- la courbe de réponse correspondant à cette transmittance peut être tracée facilement et pratiquement sans autre calcul
- les courbes de gain et de phase ainsi obtenues s'appellent **diagramme de Bode**

Hendrik Wade Bode

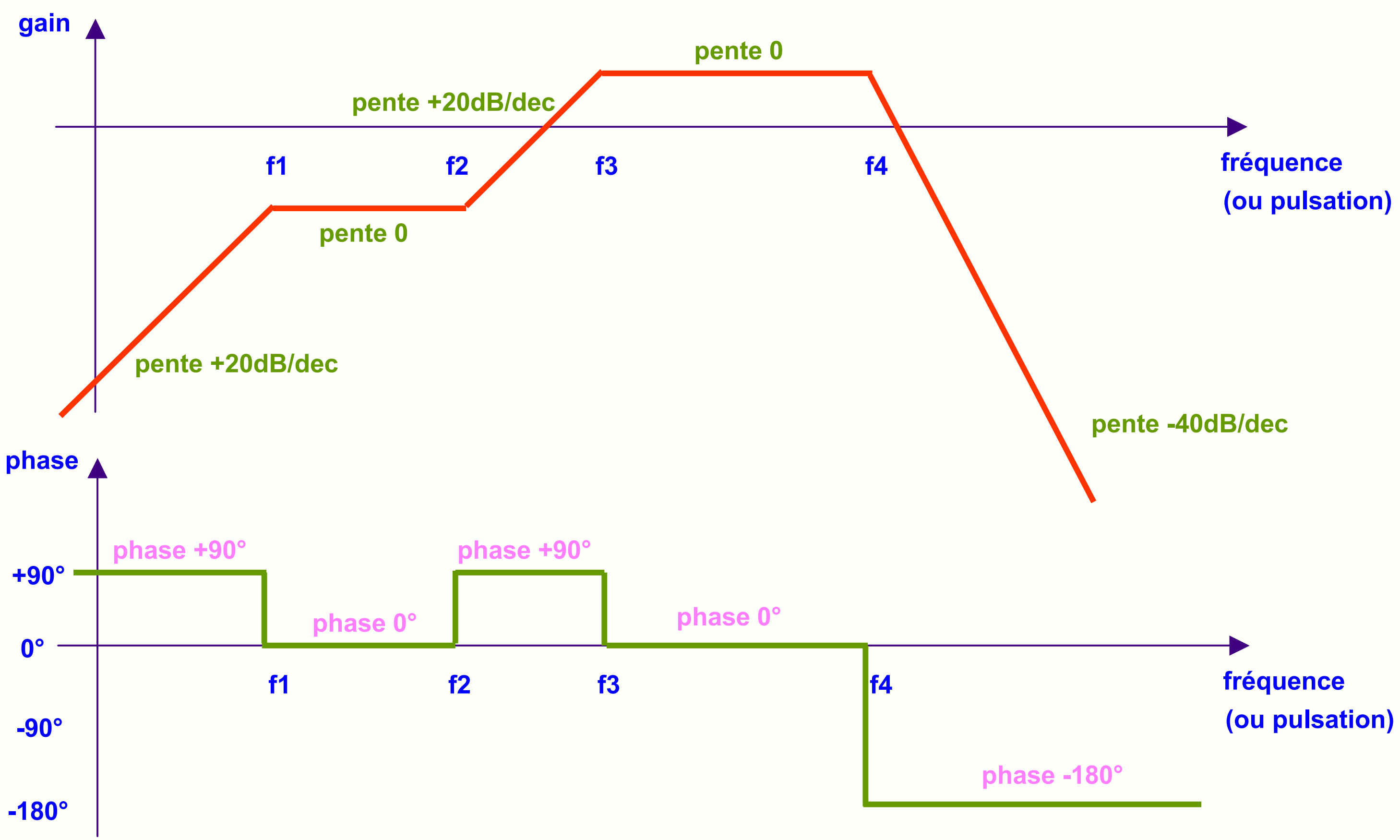
- né le 24 décembre 1905 à Madison dans le Wisconsin
- physicien américain, Bachelor of Arts and Masters de l'Université de l'Ohio
- ingénieur aux Bell Labs où il s'intéresse à la théorie des réseaux et aux communications à longue distance
- docteur en Physique à l'Université Columbia en 1935
- auteur d'un ouvrage devenu un classique du genre : ***Network Analysis and Feedback Amplifier Design*** en 1945
- on lui doit beaucoup de publications sur les filtres, mais aussi une représentation des fonctions complexes, dite **diagramme de Bode**.
- quitte les Bell Labs en 1967 avec le titre de Vice-Président chargé des affaires militaires pour aller professer à Harvard
- décédé en juin 1982

It is a sad fact that wars are often the stimulus for major scientific advantages. H. W. Bode

9- Courbe de Bode asymptotique

Lorsqu'on trace un diagramme de Bode, on dessine d'abord le diagramme asymptotique :

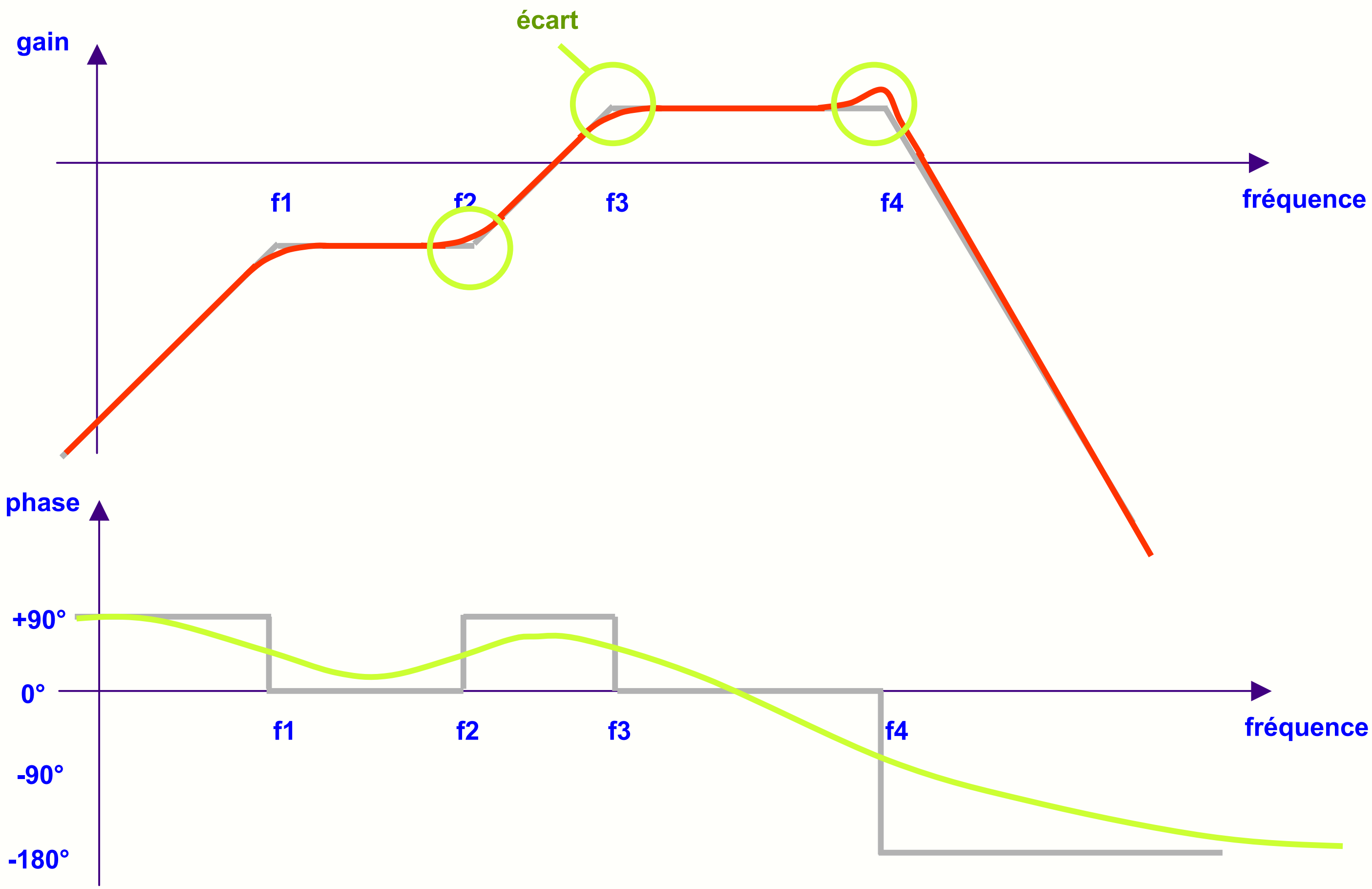
- la courbe de gain asymptotique est formé d'un suite de segments de droite de **pente 0, ± 20 dB/decade, ± 40 dB/decade ...**
- ces portions de courbes sont des droites parce qu'on utilise une **échelle de fréquence logarithmique**
- la courbe de phase asymptotique est formée de segments de droites aux ordonnées **0, ± 90°, ± 180° …**



10- Courbe de Bode réelle

Une fois que le diagramme asymptotique est tracé, on peut dessiner, le plus souvent sans autre calcul, la courbe réelle :

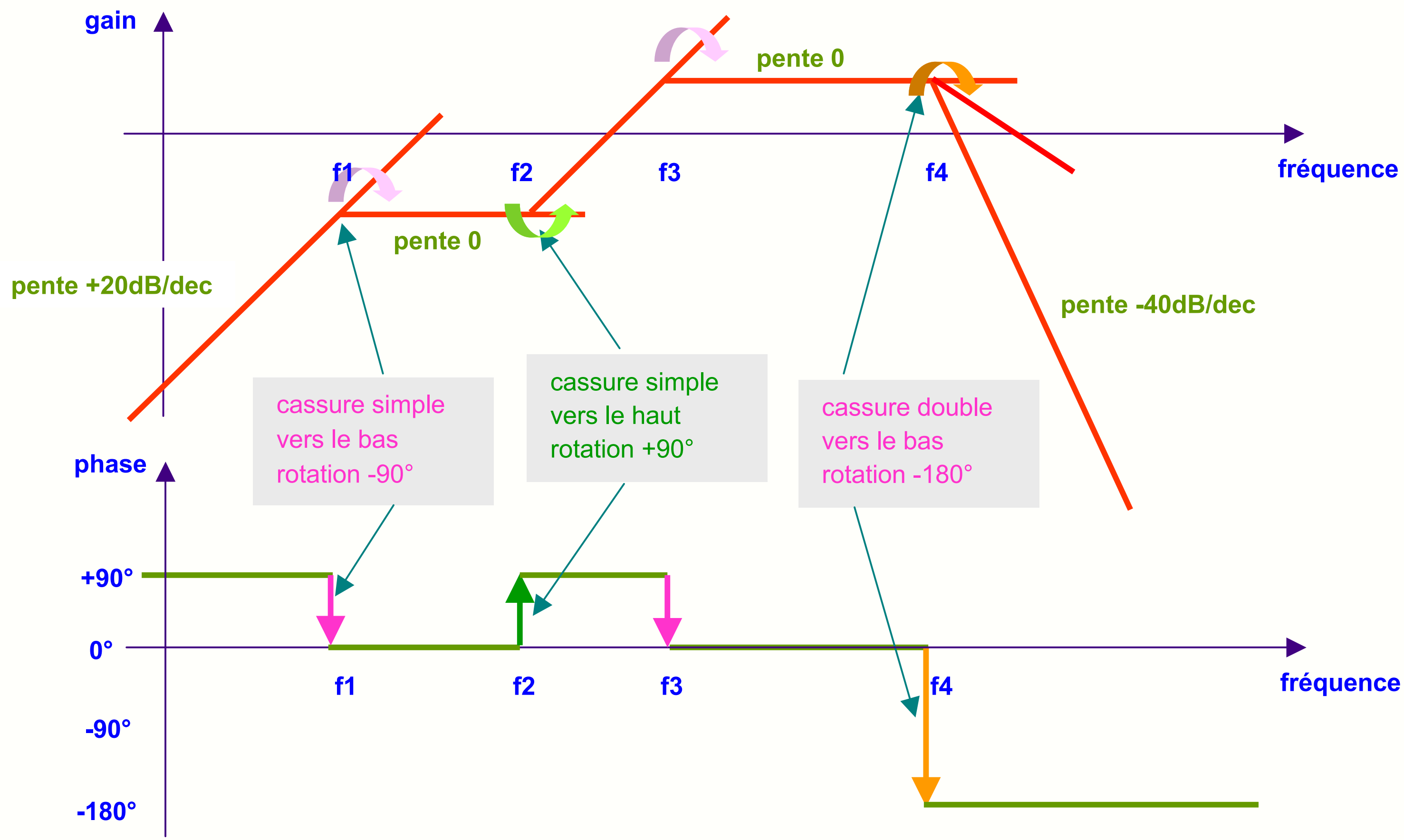
- la courbe de gain réelle est très proche de la courbe asymptotique et ne s'en écarte qu'au voisinage des cassures
- la courbe de phase réelle s'écarte davantage de la courbe asymptotique



11- Les propriétés des cassures

Le diagramme de Bode asymptotique comporte un certain nombre de **cassures** se traduisant par un changement de pente sur la courbe de gain et une variation d'argument sur la courbe de phase :

- une cassure **simple** fait passer la pente de 0 à -20dB/dec par exemple, une cassure **double** de 0 à –40dB/dec ou de +20 à –20dB/dec
- une cassure **simple vers le bas** est accompagnée d'une **rotation de phase de –90°**
- une cassure **simple vers le haut** est accompagnée d'une **rotation de phase de +90°**
- une cassure **double vers le bas** est accompagnée d'une **rotation de phase de –180°**
- etc …



12- Comment trouver les fréquences des cassures

La position des cassures n'est pas à chercher, elle apparaît naturellement dès que la transmittance est mise sous la forme standard :

- les termes en **1+ …** du numérateur donnent une **cassure** vers le haut, les termes en **1+ …** du dénominateur une cassure vers le bas
- les termes du **premier ordre** donnent une **cassure simple**, ceux du **deuxième ordre** une **cassure double**

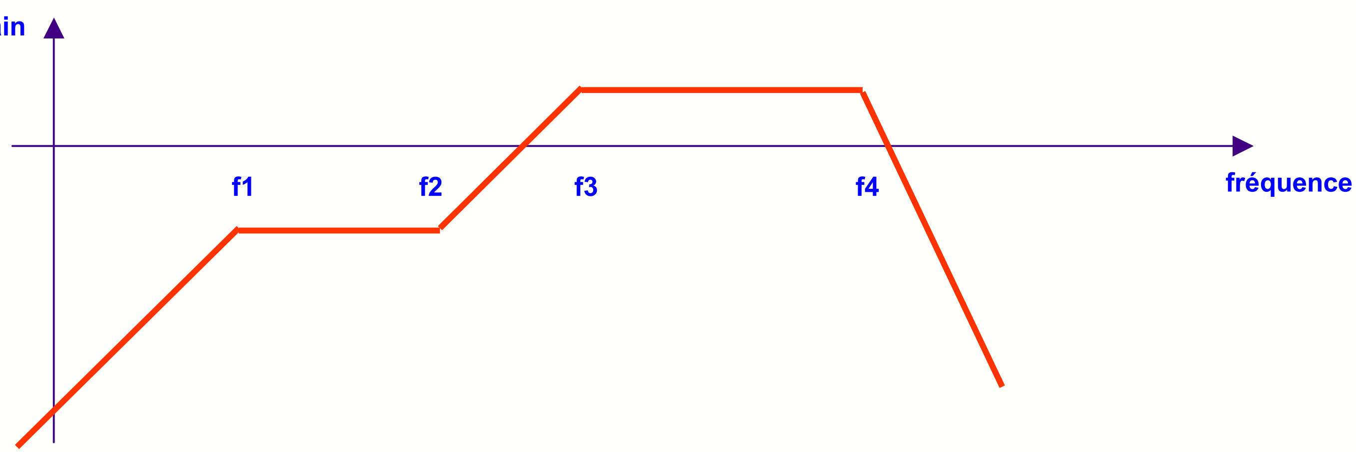
$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}\overbrace{(1+j\frac{\omega}{\omega_2})}^{\text{premier ordre}}}{(1+j\frac{\omega}{\omega_1})(1+j\frac{\omega}{\omega_3})\underbrace{(1+2mj\frac{\omega}{\omega_4}-\frac{\omega^2}{\omega_4^2})}_{\text{second ordre}}}$$

cassure simple vers le haut à ω2

cassure simple vers le bas à ω1

cassure simple vers le bas à ω3

cassure double vers le bas à ω4



13- La forme standard de la transmittance

Une transmittance mise sous la forme standard peut comporter 4 différents types de termes :

- un terme constant : $\underline{T}(j\omega)=K$
- un terme contenant la pulsation : $\underline{T}(j\omega)=j\dfrac{\omega}{\omega_0}$ ou $-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$
- un ou des termes du premier ordre : $\underline{T}(j\omega)=1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}$
- un ou des termes du second ordre : $\underline{T}(j\omega)=1+2mj\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$

La mise sous la forme standard de la transmittance :

- nécessite quelques calculs simples, mais c'est pratiquement la **seule difficulté mathématique** du tracé du diagramme de Bode
- fait apparaître les **fréquences des cassures et leur type** (simple, double, vers le haut, vers le bas) de la courbe de gain
- donne les **rotations de phase** associées aux cassures sur la courbe de phase

mettre 100 en facteur

mettre 200 en facteur

$$\underline{T}(jf)=\frac{20(100+jf)}{(200+j10f)(1+j\frac{f}{5000})} \rightarrow \underline{T}(jf)=\frac{20.100(1+j\frac{f}{100})}{200(1+j\frac{5f}{100})(1+j\frac{f}{5000})} \rightarrow \underline{T}(jf)=\frac{10(1+j\frac{f}{100})}{(1+j\frac{f}{20})(1+j\frac{f}{5000})}$$

regrouper les termes

cassure simple vers le haut à ω=100

cassure simple vers le bas à ω=20

cassure simple vers le bas à ω=5000

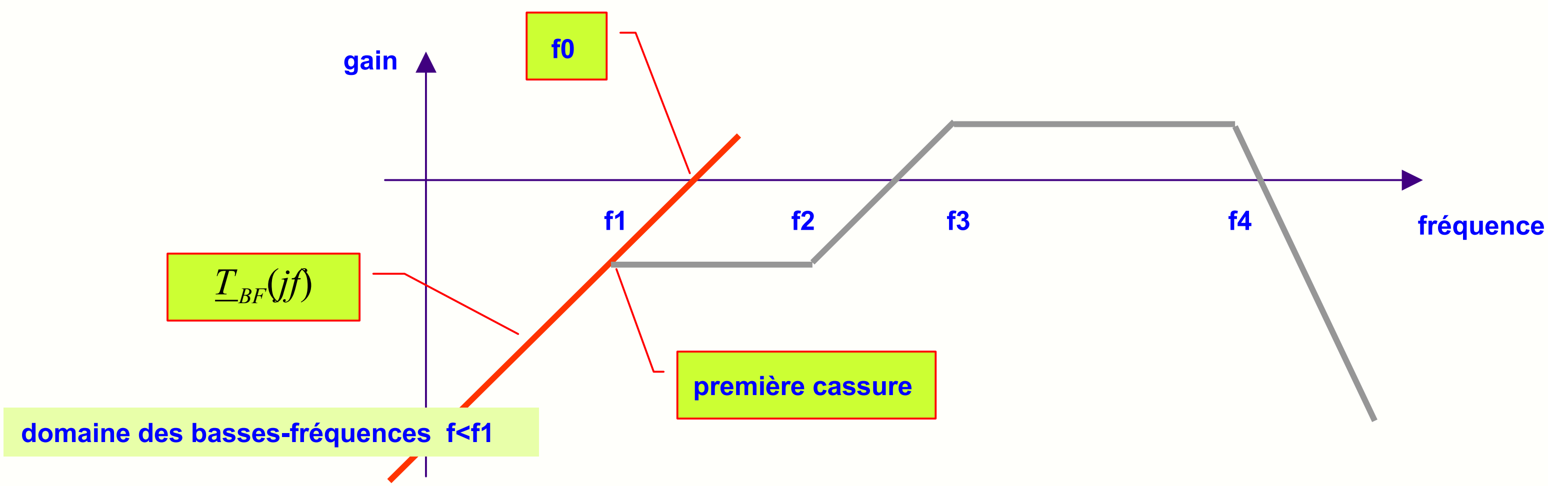
14- Le diagramme de Bode aux basses-fréquences

Une fois que les fréquences de cassures sont connues, on s'intéresse à la partie du diagramme concernant les basses-fréquences :

- les basses-fréquences correspondent aux fréquences inférieures à la plus basse des fréquences de cassure
- aux fréquences basses les termes de la forme **(1+ …)** disparaissent de la transmittance en se réduisant à **(1)**
- il ne reste donc qu'un **terme constant** ou un **terme en** ω plus rarement **en** ω^2

si $\omega << \omega_{1,2..}$ alors $\dfrac{\omega}{\omega_{1,2..}} << 1$ et

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}(1+\cancel{j\frac{\omega}{\omega_2}})}{(1+\cancel{j\frac{\omega}{\omega_1}})(1+\cancel{j\frac{\omega}{\omega_3}})(1+\cancel{2mj\frac{\omega}{\omega_4}}-\cancel{\frac{\omega^2}{\omega_4^2}})}\approx j\frac{\omega}{\omega_0}=\underline{T}_{BF}(j\omega)$$



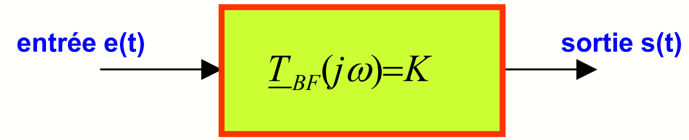
La simple écriture de la transmittance aux basses-fréquences :

- nous apprend comment démarre la courbe de gain et son allure aux basses-fréquences
- nous apprend à quelle valeur d'argument démarre la courbe de phase

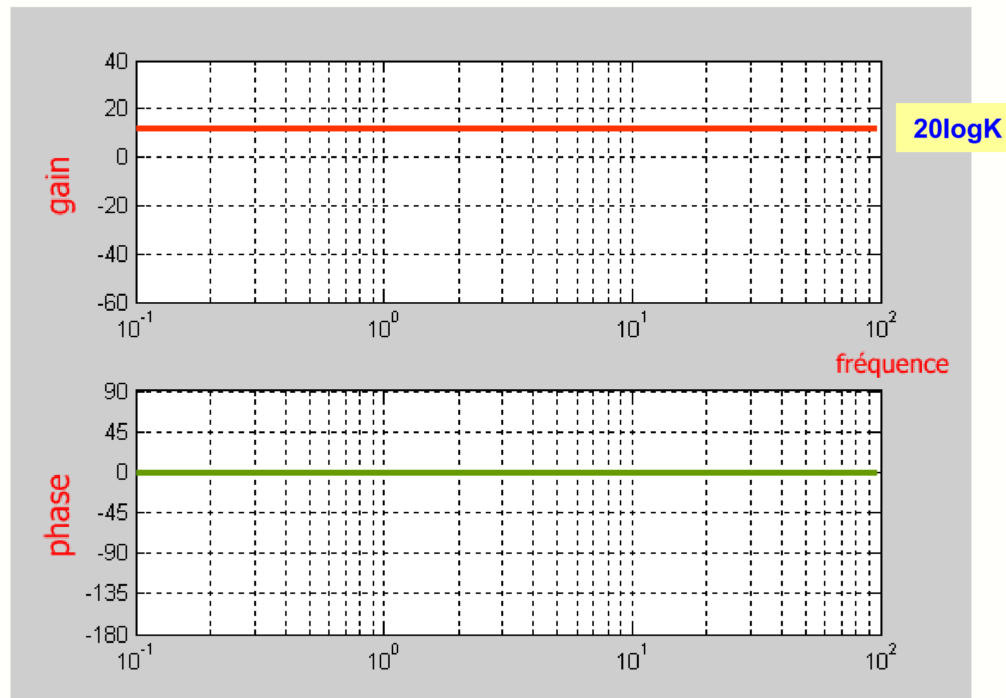
Les 3 diapos suivantes rappellent les tracés des diagrammes de Bode pour les transmittances simples les plus courantes

15- Diagramme de Bode d'un gain pur

Dans certains cas la transmittance aux basses-fréquences se réduit à une **amplification K** réelle positive :



- le module s'écrit : $\left|\underline{T}(j\omega)\right|=K$
- l'argument s'écrit : $\arg[\underline{T}(j\omega)]=0$



- la courbe de gain est une droite
- le gain est constant et vaut **G=20log(K)**

- la courbe de phase est une droite
- la phase est constante et vaut **0°**

Remarque : si la transmittance est négative $\underline{T}_{BF}(j\omega)=-K$, la phase passe à **–180°**

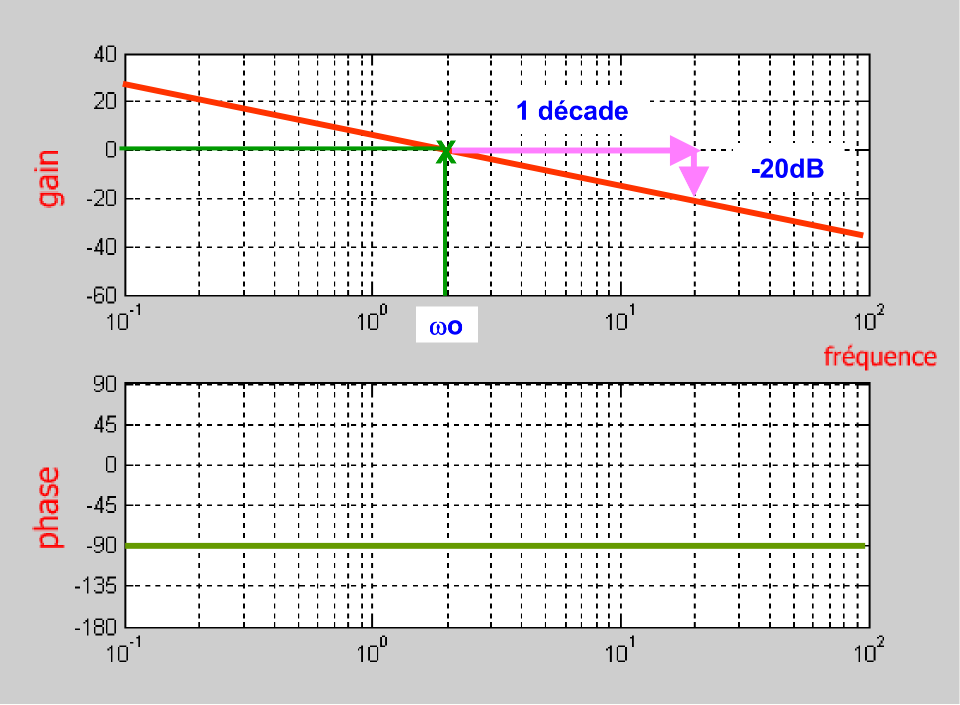
16- Diagramme de Bode d'un intégrateur

Si la transmittance équivalente contient une pulsation au dénominateur, c'est celle d'un intégrateur :

entrée e(t) → $\underline{T}_{BF}(j\omega)=\dfrac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ → sortie s(t)

- le module s'écrit : $\left|\underline{T}(j\omega)\right|=\dfrac{\omega_0}{\omega}$
- l'argument s'écrit : $\arg[\underline{T}(j\omega)]=-90°$

- le gain vaut G = -20log(ω) + 20log(ωo)
- si ω passe à 10ω (une décade) le gain passe à G – 20 dB
- la pente est donc de **–20 dB/decade**
- le module vaut 1 soit **0 dB à ω=ωo**

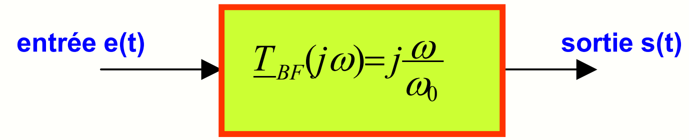


- la courbe de phase est horizontale
- la phase est égale à **-π/2**

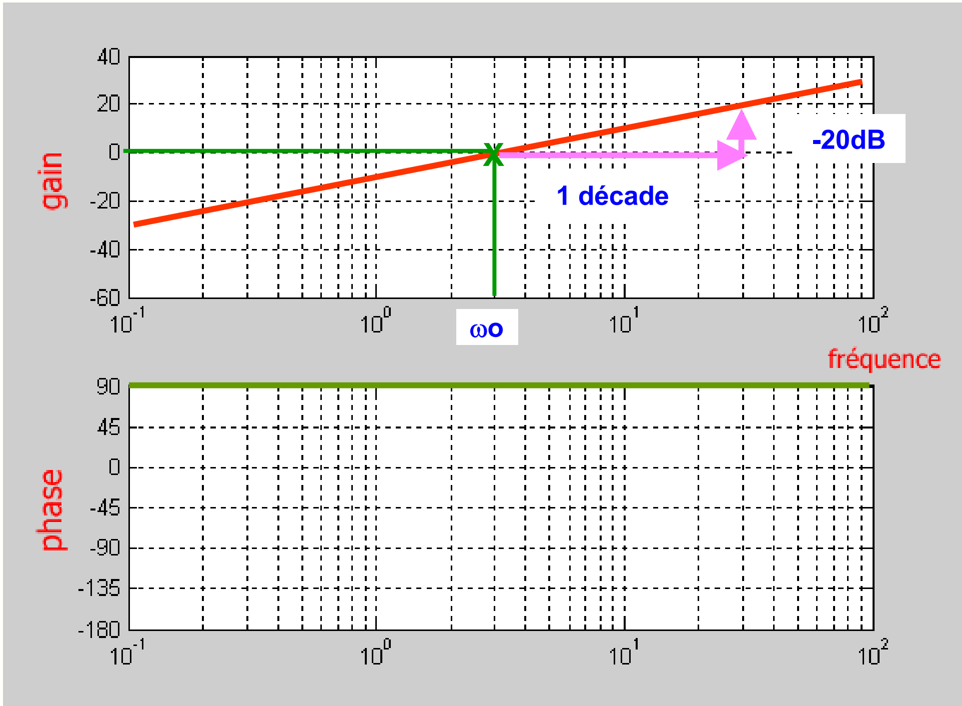
Remarque : si la transmittance est au carré : $\underline{T}_{BF}(j\omega)=-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$, la pente passe à **–40 dB/decade** et la phase au démarrage à **–180°**

17- Diagramme de Bode d'un dérivateur

Si la transmittance équivalente contient une pulsation au numérateur, c'est celle d'un dérivateur :



- le module s'écrit : $|\underline{T}(j\omega)|=\frac{\omega}{\omega_0}$
- l'argument s'écrit : $\arg[\underline{T}(j\omega)]=+90°$



- le gain vaut G = 20log(ω) - 20log(ωo)
- si ω passe à 10ω (une décade) le gain passe à G + 20 dB
- la pente est donc de **+20 dB/decade**
- le module vaut 1 soit **0 dB à ω=ωo**

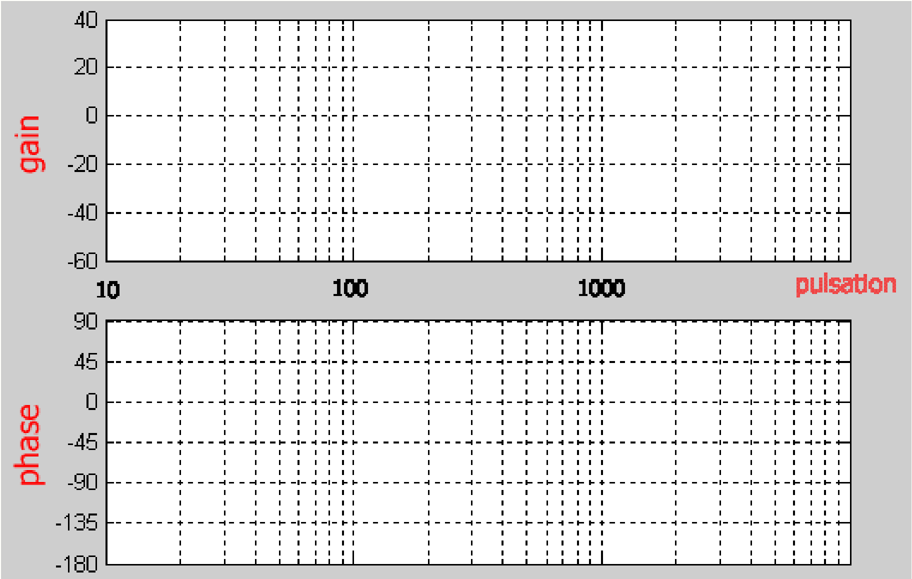
- la courbe de phase est horizontale
- la phase est égale à **+π/2**

Remarque : si la transmittance est au carré : $\underline{T}_{BF}(j\omega)=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, la pente passe à **+40 dB/decade** et la phase au démarrage à **+180°**

18- Les différentes phases du tracé (1)

Récapitulons les différentes étapes qui conduisent au tracé du diagramme de Bode :

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{200})(1000+j\omega)}$$



18- Les différentes phases du tracé (2)

Récapitulons les différentes étapes qui conduisent au tracé du diagramme de Bode :

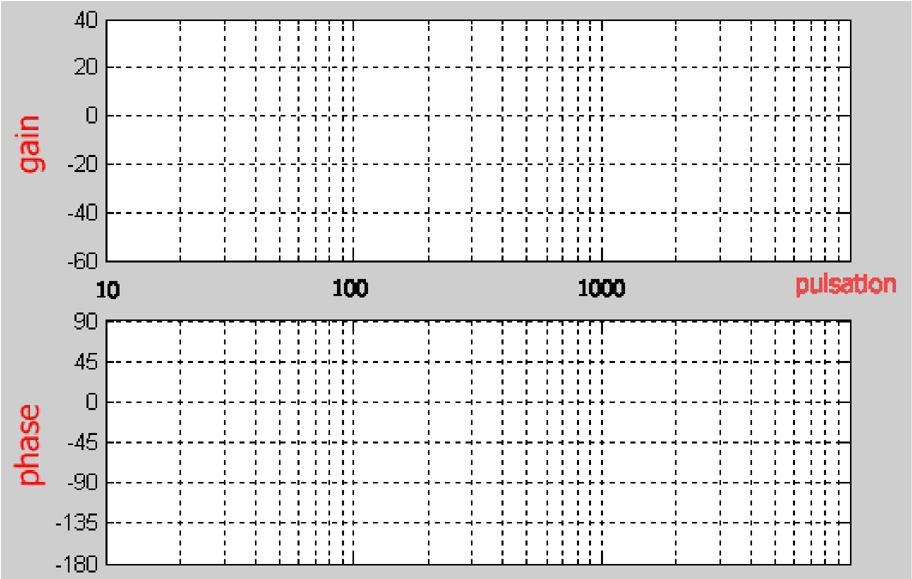
$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{200})(1000+j\omega)}$$

⇒ **étape 1** : mettre la transmittance sous la forme standard

⇒ **étape 2** : noter les valeurs et les types des cassures

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j\frac{\omega}{100}}{(1+j\frac{\omega}{200})(1+j\frac{\omega}{1000})}$$

cassure simple à ω=200 vers le bas, cassure simple à ω=1000 vers le bas



18- Les différentes phases du tracé (3)

Récapitulons les différentes étapes qui conduisent au tracé du diagramme de Bode :

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{200})(1000+j\omega)}$$

⇒ **étape 1** : mettre la transmittance sous la forme standard

⇒ **étape 2** : noter les valeurs et les types des cassures

cassure simple à ω=200 vers le bas, cassure simple à ω=1000 vers le bas

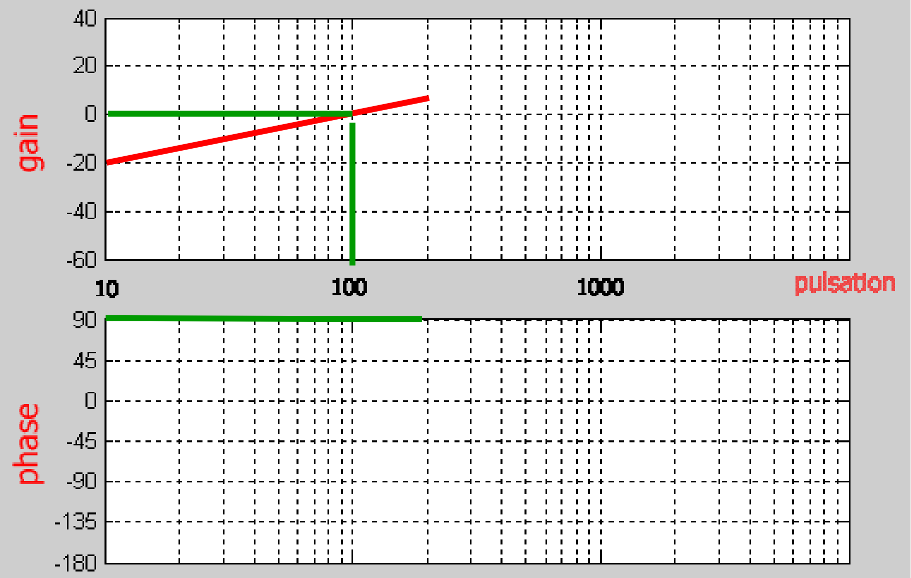
$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j\frac{\omega}{100}}{(1+j\frac{\omega}{200})(1+j\frac{\omega}{1000})}$$

⇒ **étape 3** : écrire la transmittance équivalente aux basses-fréquences

démarrage avec une pente de +20dB/dec et une phase de +90°, passe à 0dB à ω=100

$$\underline{T}_{BF}(j\omega)=j\frac{\omega}{100}$$

⇒ **étape 4** : tracer la partie basse-fréquence du diagramme de Bode



18- Les différentes phases du tracé (4)

Récapitulons les différentes étapes qui conduisent au tracé du diagramme de Bode :

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{200})(1000+j\omega)}$$

⇒ **étape 1** : mettre la transmittance sous la forme standard

⇒ **étape 2** : noter les valeurs et les types des cassures

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j\frac{\omega}{100}}{(1+j\frac{\omega}{200})(1+j\frac{\omega}{1000})}$$

cassure simple à $\omega=200$ vers le bas, cassure simple à $\omega=1000$ vers le bas

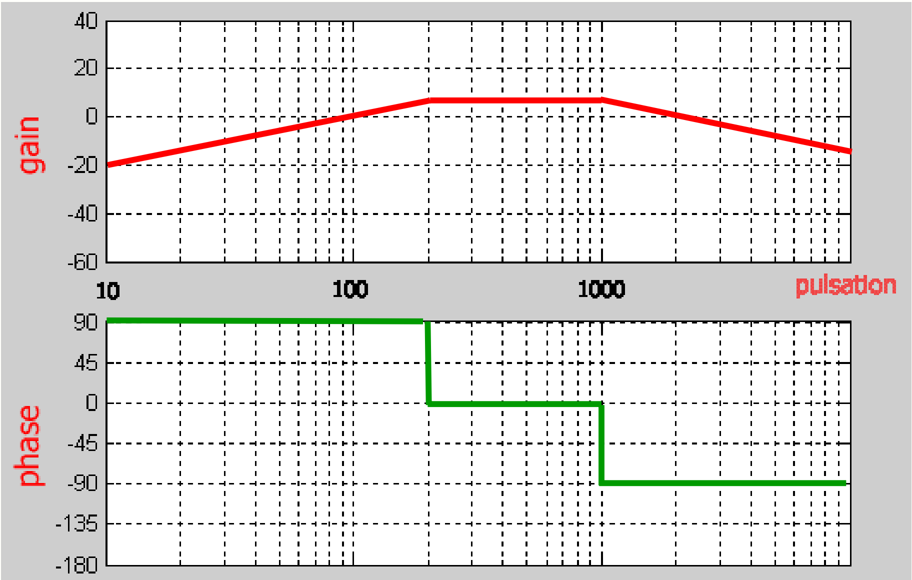
⇒ **étape 3** : écrire la transmittance équivalente aux basses-fréquences

$$\underline{T}_{BF}(j\omega)=j\frac{\omega}{100}$$

démarrage avec une pente de +20dB/dec et une phase de +90°, passe à 0dB à $\omega=100$

⇒ **étape 4** : tracer la partie basse-fréquence du diagramme de Bode

⇒ **étape 5** : compléter le diagramme de Bode en introduisant les cassures successives sur la courbe de gain et la courbe de phase



18- Les différentes phases du tracé (5)

Récapitulons les différentes étapes qui conduisent au tracé du diagramme de Bode :

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{200})(1000+j\omega)}$$

⇒ **étape 1** : mettre la transmittance sous la forme standard

⇒ **étape 2** : noter les valeurs et les types des cassures

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{j\frac{\omega}{100}}{(1+j\frac{\omega}{200})(1+j\frac{\omega}{1000})}$$

cassure simple à ω=200 vers le bas, cassure simple à ω=1000 vers le bas

⇒ **étape 3** : écrire la transmittance équivalente aux basses-fréquences

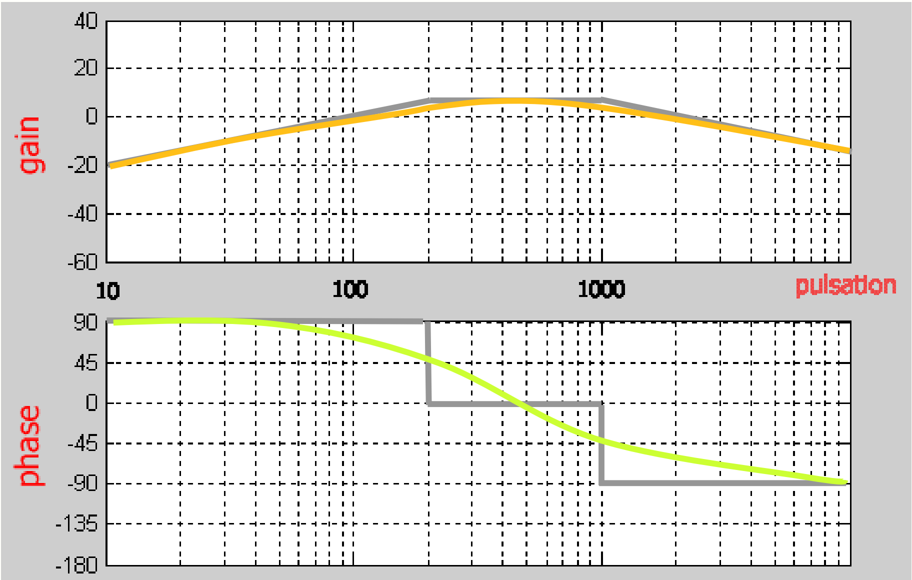
$$\underline{T}_{BF}(j\omega)=j\frac{\omega}{100}$$

démarrage avec une pente de +20dB/dec et une phase de +90°, passe à 0dB à ω=100

⇒ **étape 4** : tracer la partie basse-fréquence du diagramme de Bode

⇒ **étape 5** : compléter le diagramme de Bode en introduisant les cassures successives sur la courbe de gain et la courbe de phase

⇒ **étape 6** : tracer les courbes réelles et admirer le travail !



19- Quelques questions

Q : *On a vu comment traiter les termes du premier et du second ordre, mais que dois-je faire avec un troisième ordre ?*

R : Un troisième ordre peut toujours être factorisé soit en 3 fonctions du premier ordre, soit en un premier ordre et un second ordre.

Q : *Vaut –il mieux travailler en fréquence ou en pulsation ? L'un est-il plus facile que l'autre ?*

R : C'est exactement la même chose, le choix se fait en fonction de la transmittance donnée et du travail demandé.

Q : *Je n'ai pas bien saisi pourquoi je dois chercher la transmittance équivalente aux basses-fréquences !*

R : Elle est toujours très simple, et correspond au début du diagramme : elle permet donc de démarrer le tracé du gain et de la phase.

Q : *J'ai une cassure simple vers le bas : comment dois-je tracer la courbe réelle ?*

R : La courbe réelle passe à 3dB en-dessous de la cassure (et à 3dB au-dessus pour une cassure simple vers le haut).

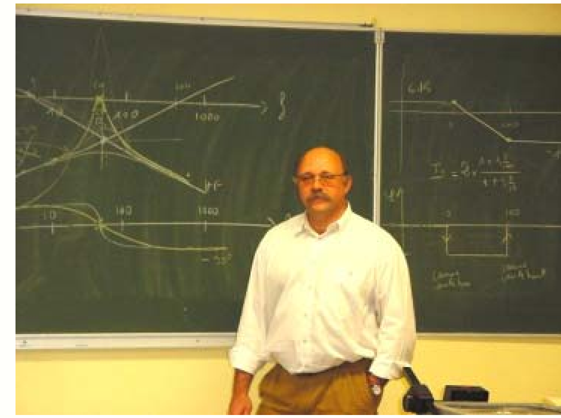
Q : *Dans ma transmittance j'ai un terme du second ordre…j'ai trouvé l'amortissement m mais je ne sais pas quoi en faire !*

R : L'amortissement m ne sert à rien pour tracer le diagramme asymptotique en effet…mais uniquement pour la courbe réelle.

Q : *Justement ! J'ai une cassure double vers le bas…comment je trace la courbe réelle par rapport à la cassure ?*

R : La courbe passe au-dessus ou en-dessous, selon la valeur de m. Le mieux est de calculer le module à la fréquence de cassure.

…des précisions sur les systèmes du premier et du second ordre peuvent être trouvées dans le diaporama :



Volcan Bromo sur l'île de Java

FIN