

Durée : 4 heures.

ETUDE DU SYNTHETISEUR DE FREQUENCE DU RADIOTELEPHONE MOBILE.

Le sujet comporte 3 parties A, B et C qui peuvent être traitées indépendamment. Elles concernent la synthèse de fréquence.

Le synthétiseur de fréquence comprend une boucle à verrouillage de phase dont le synoptique est donné sur la figure 1. L'étude générale de la boucle est faite dans la partie C. La partie B concerne l'oscillateur commandé en tension, et vise en particulier à établir la relation qui traduira sa fonction de transfert. La partie A s'intéresse à la solution adoptée pour réaliser l'inductance nécessaire au fonctionnement de l'oscillateur.

La tension $v_A(t)$ est fournie par un oscillateur de référence très stable dont la fréquence f_A est fixe et vaut 12,500 kHz.

Lorsque le radiotéléphone mobile est accordé sur le canal 128, la fréquence de l'oscillateur local (tension de sortie du V.C.O. : $v_i(t)$) doit être $f_1 = 447,8$ MHz.

La tension d'alimentation de l'ensemble est $V_{cc} = 8,5$ V.

A : ETUDE DE L' ELEMENT INDUCTIF.

L'oscillateur qui constitue une partie de la boucle à verrouillage de phase est du type "LC". L'élément inductif est constituée d'un tronçon de câble coaxial rigide.

On se propose d'étudier d'abord une ligne coaxiale infinie, puis une ligne de longueur finie, afin de mettre en évidence les conditions dans

lesquelles ce tronçon de câble se comportera comme une inductance.

Une ligne coaxiale de longueur infinie est alimentée en son extrémité A par un générateur sinusoïdal délivrant une tension $u(A,t) = U_0 \sin \omega t$.

En un point M de la ligne situé à la distance x de A (figures 2a-2b), la tension sera :

$$u_s(M,t) = U_0 \sin 2\pi(t/T - x/\lambda)$$

où T est la période du signal sinusoïdal.

A-1 : Quels sont les phénomènes que met en évidence cette expression ? Exprimer le retard angulaire ψ de la tension $u_s(M)$ par rapport à la tension $u_s(A)$. ψ sera exprimé en fonction de x et λ . Que représente λ ?

A-2 : Notations et explications préalables.

On montre, si la ligne est sans pertes, que l'intensité et la tension sont liées en tout point par la relation :

$$u_s(M,t) = R_c i_s(M,t)$$

R_c est l'impédance caractéristique de la ligne, impédance réelle dans ce cas.

Lorsque la ligne est de longueur finie l, l'onde de tension $u_s(M,t)$ et de courant $i_s(M,t)$, émise au point A, est réfléchie au point B (figure 3-a), et donne naissance à une onde de tension $u_r(M,t)$ et de courant $i_r(M,t)$ se propageant en sens inverse de l'onde directe $u_s(M,t)$ et $i_s(M,t)$ (figure 3-b).

Cette onde réfléchie, issue de B, vérifie en tout point M la relation :

$$u_r(M,t) = - R_c i_r(M,t)$$

L'impédance du générateur vaut R_c , et il n'y aura donc pas de nouvelle réflexion au point A.

En tout point M de la ligne, on écrira la tension $u(M,t)$ comme la somme de la tension $u_s(M,t)$ issue de A, et de la tension $u_r(M,t)$ issue de B :

$$u(M,t) = u_s(M,t) + u_r(M,t)$$

Il en est de même pour le courant :

$$i(M,t) = i_s(M,t) + i_r(M,t)$$

On se propose d'étudier la variation de l'impédance d'entrée de la ligne en fonction de sa longueur l, et de son impédance de terminaison Z (figures 3-a et 3-b).

Pour cela, on associe aux grandeurs $u_s(M,t)$, $i_s(M,t)$, $u_r(M,t)$, $i_r(M,t)$, $u(M,t)$ et $i(M,t)$, les grandeurs complexes respectives $\underline{U}_s(M)$, $\underline{I}_s(M)$, $\underline{U}_r(M)$, $\underline{I}_r(M)$, $\underline{U}(M)$ et $\underline{I}(M)$.

Ainsi, à : $u_s(A,t) = U_0 \sin \omega t$

on associe $\underline{U}_s(A) = U_0$.

et à : $u_s(M,t) = U_0 \sin(\omega t - 2\pi x/\lambda)$

on associe $\underline{U}_s(B) = U_0 \exp(-j 2\pi x/\lambda) = \underline{U}_s(A) \exp(-j 2\pi x/\lambda)$

A-2-a : Au point B est connectée l'impédance Z. Montrer que $\underline{U}_s(B)$ et $\underline{U}_s(B)$ vérifient : $\underline{U}_s(B) = k \underline{U}_s(A)$,
avec $k = (Z - R_c)/(Z + R_c)$.

A-2-b : Quel est, en fonction de x, l et λ , le retard angulaire ψ de la tension $u_s(M,t)$ par rapport à la tension $u_s(B,t)$?
Exprimer $\underline{U}_s(M)$ en fonction de $\underline{U}_s(B)$ et de la distance (l-x) entre les points M et B.

A-3 : Donner l'expression de la tension complexe $\underline{U}(M)$ et celle de l'intensité complexe $\underline{I}(M)$ au point M, en fonction de : U_0 , k, x, λ et l.
On rappelle que $\underline{U}_s(A) = U_0$.

A-4 : En déduire les expressions de $\underline{U}(A)$ et $\underline{I}(A)$.
Montrer que l'impédance d'entrée de la ligne fermée par l'impédance Z est :

$$\underline{Z}_s = R_c [1 + k \exp(-2\pi j 2l/\lambda)] / [1 - k \exp(-2\pi j 2l/\lambda)]$$

A-5 : L'impédance Z est celle d'un condensateur. On l'écrit :

$$\underline{Z} = -j X$$

Montrer que k pourra s'écrire $k = -\exp(j\theta)$, avec $\theta/2 = X/R_c$.

En déduire l'expression de \underline{Z}_s en fonction de θ et l.

Montrer que \underline{Z}_s s'écrit : $\underline{Z}_s = j R_c \operatorname{tg}[(2\pi l/\lambda) - \theta/2]$.

On rappelle la relation : $(1 - \exp(-jx))/(1 + \exp(-jx)) = j \operatorname{tg}(x/2)$

A-6 : La longueur l de la ligne est inférieure à $\lambda/4$. Calculer la valeur de l'inductance à laquelle est équivalent le tronçon de ligne lorsque l'extrémité est en court-circuit, sachant que :

$$R_c = 200 \Omega ; l = 5,50 \text{ cm} ; \lambda = 47,0 \text{ cm} ; f = 447,8 \text{ MHz.}$$

A-7 : Le condensateur de réactance $-jX$ est ajustable. Calculer la valeur de l'inductance L équivalente au tronçon de ligne lorsque la capacité qui le termine vaut 8,2 pF.

B : ETUDE DE L' OSCILLATEUR.

La fréquence f_0 de l'oscillateur local est fournie par un oscillateur dont on se propose d'étudier le circuit oscillant.

L'oscillateur est du type "Clapp" ; la chaîne de réaction se compose de 3 impédances purement réactives disposées selon la figure 4-a.

$$\text{On pose : } \underline{Z}_1 = jX_1 ; \underline{Z}_2 = jX_2 ; \underline{Z}_3 = jX_3.$$

L'inductance L' est obtenue à partir de l'inductance L précédemment calculée, et d'un condensateur monté en parallèle. Ce montage permet d'obtenir une valeur plus élevée pour L'.

La capacité γ' est obtenue par l'association donnée sur la figure 5. Le circuit de polarisation de la diode varicap n'intervient pas.

B-1 : Exprimer γ' en fonction de C_1 , C_2 et C_3 .

B-2 : La pulsation d'oscillation ($\omega_1 = 2\pi f_1$) est déterminée par la relation entre les 3 réactances : $X_1 + X_2 + X_3 = 0$. Exprimer ω_1 en fonction des éléments du circuit.

Montrer que $C \gg \gamma'$ et simplifier la relation précédente.

C'est cette relation simplifiée qu'on utilisera par la suite.

B-3 : La diode est polarisée par une tension continue V_r variant de 3,0 V à 6,0 V, ce qui permet le balayage des canaux 0 à 255.

L'expression de la capacité C_3 est :

$$C_3 = C_0 / (1 + V_r/0,7)^r.$$

avec : $C_0 = 31 \text{ pF}$; capacité de la diode pour $V_r = 0$.

C_3 : capacité de la diode pour une tension V_r ,

γ' : exposant qui dépend du type de jonction utilisée (ici on prendra $\gamma' = 0,62$).

Calculer les valeurs de γ' pour $V_r = 3,0 \text{ V}$ et $V_r = 6,0 \text{ V}$.

On admet que la variation de γ' en fonction de la polarisation de la diode varicap est linéaire sur l'intervalle de tension utilisé.

Ainsi, si la tension de polarisation V_r varie de ΔV_r , la capacité équivalente γ' va varier de $\Delta \gamma'$, et on pourra écrire :

$$\Delta \gamma' = \alpha \Delta V_r.$$

Calculer α et en déduire la variation $\Delta \gamma'$ de la capacité équivalente lorsque la tension de polarisation V_r augmente de ΔV_r lors du passage d'un canal au canal suivant.

B-4 : La variation $\Delta \gamma'$ provoque une variation Δf_1 de la fréquence de résonance de l'oscillateur. Etablir l'expression de Δf_1 en fonction de f_1 , γ' et $\Delta \gamma'$.

Application numérique : Calculer Δf_1 pour $f_1 = 447,8 \text{ MHz}$ et $\gamma' = 1,57 \text{ pF}$.

B-5 : Le VCO peut être représenté par le schéma-bloc de la figure 6, avec ΔV_r comme grandeur d'entrée, et $\Delta \omega_1$ comme grandeur de sortie.

Montrer que $\Delta \omega_1 = K \Delta V_r$.

Application numérique : Calculer K.

C : ETUDE DE LA BOUCLE

Pour les grandeurs v_A et v_B de la figure 1, on pose :

$$v_A(t) = V_A \cos(\varphi_A(t))$$

$$v_B(t) = V_B \cos(\varphi_B(t))$$

La pulsation instantanée de $v_A(t)$ est $\omega_A(t)$, celle de $v_B(t)$ est $\omega_B(t)$

La tension de sortie du comparateur de phase peut se mettre sous la forme :

$$v_C(t) = (V_{00}/2\pi)(\varphi_A - \varphi_B) + v'_C(t)$$

On ne tiendra pas compte du terme $v'_C(t)$ excepté dans la question C-1

Le schéma du filtre passe-bas est donné figure 7 dans laquelle A_1 représente un amplificateur d'amplification égale à 2,4, d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle

Le VCO délivre une tension :

$$v_1(t) = V_1 \cos \varphi_1(t)$$

Dans cette partie, on linéarise la caractéristique du VCO et on suppose donc que sa pulsation ω_1 est proportionnelle à la tension $v_1(t)$ fournie par le filtre passe-bas :

$$\omega_1(t) = K v_1(t) \quad \text{avec } K = 6,7 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}.V^{-1}$$

La pulsation du signal de sortie du diviseur est :

$$\omega_2(t) = \omega_1(t)/N$$

On notera $\varphi_A(p)$, $\varphi_B(p)$, $\varphi_1(p)$, $\Omega_A(p)$, $\Omega_B(p)$, $\Omega_1(p)$, $V_C(p)$, $V_1(p)$ les transformées de Laplace respectives des grandeurs :

$$\varphi_A(t), \varphi_B(t), \varphi_1(t), \omega_A(t), \omega_B(t), \omega_1(t), v_C(t), v_1(t)$$

C-1 : Exprimer la transmittance complexe $H_A(j\omega) = \underline{V_C}/\underline{V_1}$ du filtre passe-bas.

Lorsque la boucle est verrouillée, le signal $v'_C(t)$ est de la forme :

$$v'_C(t) = V'_C \cos 2\omega_1 t \quad \text{avec } V'_C = 4 \text{ V et } f_A = 12,500 \text{ kHz}$$

Déterminer l'amplitude du signal $v'_C(t)$ correspondant ; en déduire le rôle du filtre. On ne tiendra plus compte du terme $v'_C(t)$ dans la suite du problème.

Exprimer la transmittance opérationnelle $H_1(p)$ du bloc filtre, d'entrée $V_C(p)$ et de sortie $V_1(p)$.

C-2 : Déterminer la transmittance opérationnelle du bloc d'entrée Ω_2 et de sortie φ_2 .

C-3 : Représenter le schéma-bloc de la boucle à verrouillage de phase

d'entrée φ_A et de sortie Ω_1 en y affichant clairement :

* les différentes grandeurs,

* les transmittances opérationnelles des différents blocs.

C-4 : Montrer que si on considère Ω_A comme grandeur d'entrée, on peut se ramener au schéma-bloc de la figure 8 avec :

$$H(p) = \frac{H_0}{p(1 + p/\omega_1)}$$

dans lequel on identifiera H_0 et ω_1 .

Pour la suite, on prendra $H_0 = 2,15 \times 10^7$ rad/s et $\omega_1 = 6 \times 10^3$ rad/s

C-5 : En régime établi, la pulsation ω_1 est constante.

Déterminer la relation liant la fréquence $f_L = \omega_L/2\pi$ du VCO et la fréquence f_A de l'oscillateur de référence.

C-6 : Applications numériques :

* calculer la valeur N_1 de N pour synthétiser une fréquence $f_L = 447,8$ MHz

* pour passer au canal suivant, on augmente N d'une unité ; quel est l'écart de fréquence qui sépare deux canaux consécutifs ?

C-7 : Stabilité

La stabilité de la boucle dépend légèrement de la valeur de N , on fera cette étude en prenant $N = 36800$.

C-7.a. Représenter sur le document-réponse le diagramme asymptotique (gain et argument) de Bode et l'allure du diagramme réel de la transmittance en boucle ouverte $T(j\omega)$.

Indiquer la condition de stabilité en boucle fermée.

Faire apparaître sur le diagramme la méthode de détermination de la marge de phase et de la marge de gain.

C-7.b. Déterminer graphiquement ou par le calcul, la valeur de ω pour laquelle le gain en boucle ouverte $G = 20 \log |T|$ vaut 0 dB.

Calculer alors $\text{Arg} T$; en déduire la marge de phase ; la stabilité est-elle suffisante ?

C-8 : Réponse transitoire :

Dans cette question, on négligera l'influence de ω_1 ; on mettra donc la transmittance opérationnelle de la chaîne directe sous la forme :

$$H(p) = H_0/p$$

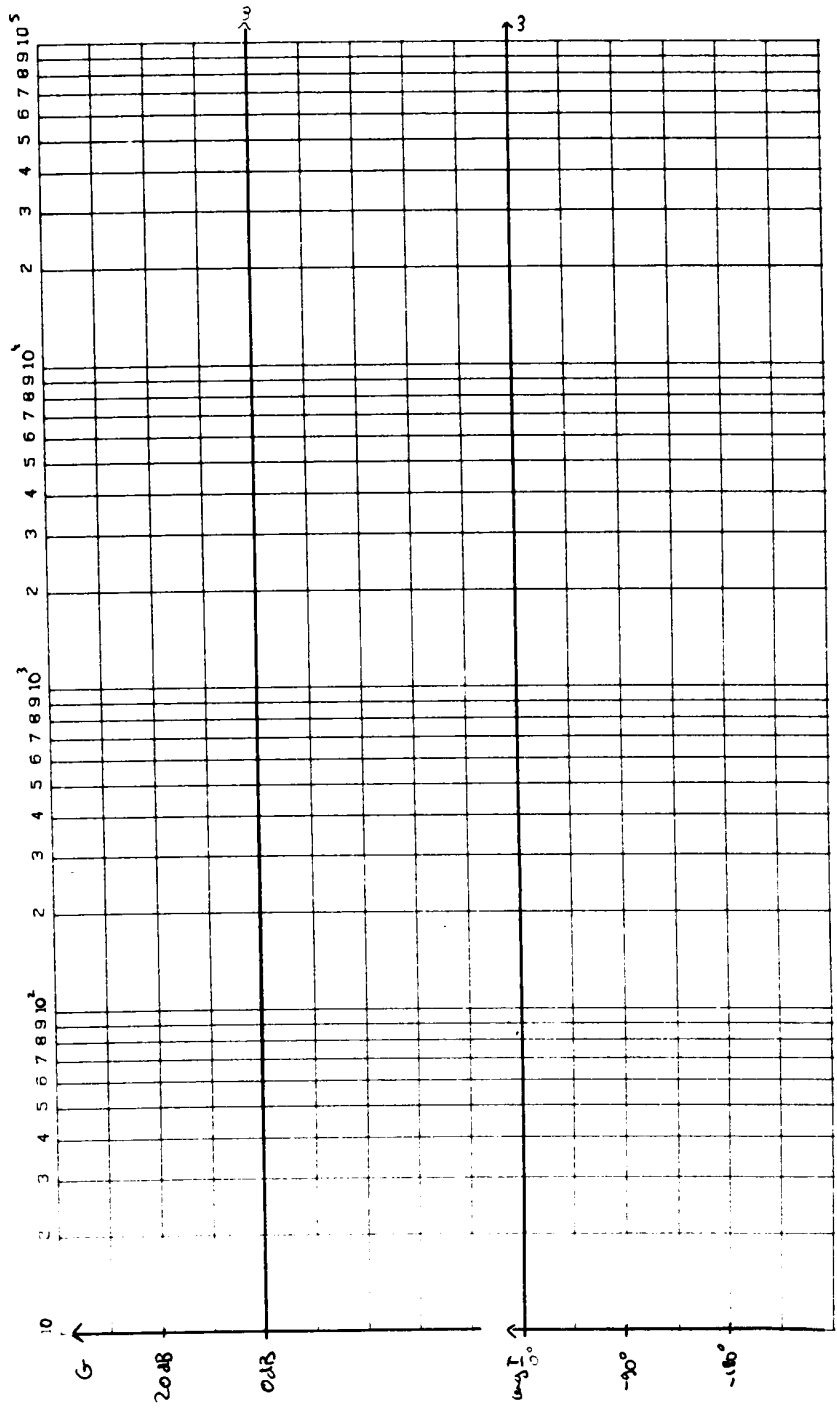
C-8.a. Déterminer la transmittance opérationnelle en boucle fermée :

$$H'(p) = \Omega_2(p)/\Omega_A(p)$$

C-8.b. En déduire l'équation différentielle qui régit les variations de $\omega_1(t)$.

C-8.c. On veut déterminer le temps nécessaire pour changer de canal ; à l'instant $t = 0$ la fréquence du VCO est égale à $f_1 = 447,8$ MHz, N passe de la valeur $N_1 = 35824$ à une valeur $N_2 = 35864$; en résolvant l'équation différentielle, déterminer l'expression de $\omega_1(t)$ puis de $f_1(t)$; représenter l'allure de $f_1(t)$.

C-8.d. La démodulation se fera correctement lorsque la valeur finale f_2 sera atteinte à 1 kHz près ; déterminer la durée au bout de laquelle le changement de canal sera effectif.



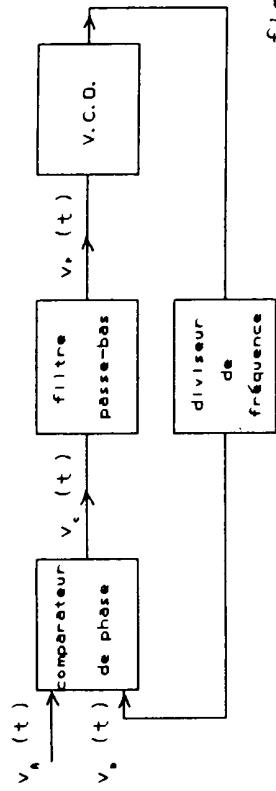


figure 1

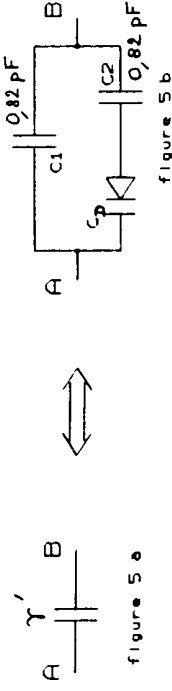


figure 5 a

figure 5 b

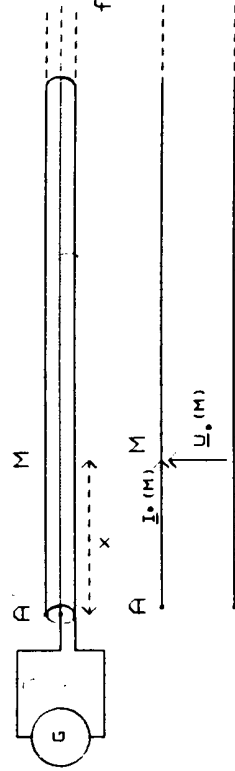


figure 2 a

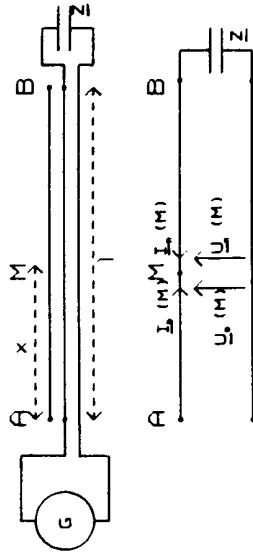


figure 3 a

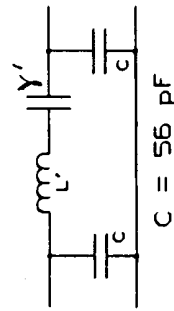


figure 4 a

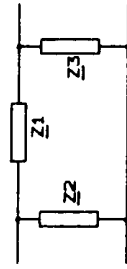


figure 4 b

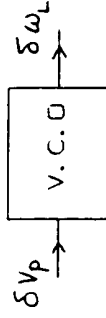


figure 6

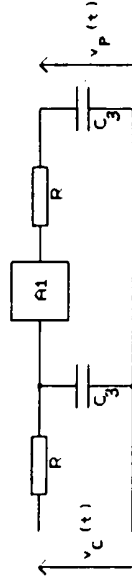


figure 7

$R = 10 \text{ k}\Omega$
 $C_3 = 15 \text{ nF}$

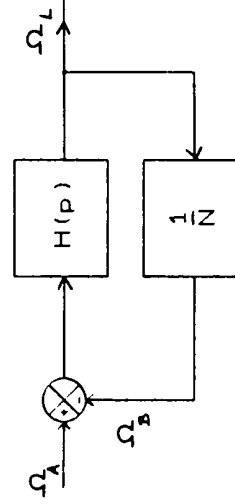


figure 8

A : Etude de l'élément inductif

A.1 : l'expression $u_B(M,t) = U_0 \sin 2\pi \left(\frac{t-x}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ met en évidence 2 phénomènes :

- la propagation d'un signal
- l'absence de pertes (U_0 constant)

le retard angulaire de $u_B(M,t)$ sur $u_D(A,t)$ est donné par :

$$\psi = 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

λ représente la longueur d'onde associée à la propagation.

A.2 a au point B, la tension et le courant vérifient la loi d'Ohm à chaque instant, soit $U(B) = Z I(B)$

on a : $U(B) = U_D(B) + U_R(B)$ (1)

et $I(B) = I_D(B)$ et $I_R(B) = I$ (2)

on donne dans l'énoncé : $U_R(B) = -R_C I_R(B)$

et $U_D(B) = R_C I_D(B)$

(2) s'écrit alors $I(B) = \frac{1}{R_C} [U_D(B) - U_R(B)]$

soit en multipliant par Z : $U(B) = Z I(B) = \frac{Z}{R_C} [U_D(B) - U_R(B)]$

cette dernière relation s'égalise avec l'expression (1)

on trouve $U_D(B) + U_R(B) = \frac{Z}{R_C} [U_D(B) - U_R(B)]$

après transformation, on obtient : $U_R(B) = \frac{Z - R_C}{Z + R_C} U_D(B)$. (3)

A.2 b l'onde réfléchie se propage de B vers A.

la distance BM vaut $l-x$. d'où le retard $\psi' = 2\pi \frac{l-x}{\lambda}$

par analogie avec l'expression de $U_D(B)$ en fonction de $U_D(A)$

on écrit : $U_R(M) = \frac{U_R(B)}{R_C} \exp(-j 2\pi \frac{l-x}{\lambda})$

A.3 $U(M) = U_D(M) + U_R(M)$

et $I(M) = \frac{U_D(M)}{R_C} - \frac{U_R(M)}{R_C}$

on donne dans l'énoncé : $U_D(M) = U_0 \exp(-j 2\pi \frac{x}{\lambda})$

quant à $U_R(M)$ on écrit :

$U_R(M) = U_R(B) \exp(-j 2\pi \frac{l-x}{\lambda})$ d'après la question A3

$U_R(M) = U_D(B) \frac{Z - R_C}{Z + R_C} \exp(-j 2\pi \frac{l-x}{\lambda})$ " " • A2

$= U_0 \exp(-j 2\pi \frac{l}{\lambda}) \frac{Z - R_C}{Z + R_C} \exp(-j 2\pi \frac{l-x}{\lambda})$

d'où les résultats : $U(M) = U_0 \left[\exp(-j 2\pi \frac{x}{\lambda}) + \frac{Z - R_C}{Z + R_C} \exp(-j 2\pi \frac{2l-x}{\lambda}) \right]$

et $I(M) = \frac{U_0}{R_C} \left[\exp(-j 2\pi \frac{x}{\lambda}) - \frac{Z - R_C}{Z + R_C} \exp(-j 2\pi \frac{2l-x}{\lambda}) \right]$

A.4 : si M est en A, $x=0$.

on écrit : $U(A) = U_0 \left[1 + \frac{Z - R_C}{Z + R_C} \exp(-j 2\pi \frac{2l}{\lambda}) \right]$

et $I(A) = \frac{U_0}{R_C} \left[1 - \frac{Z - R_C}{Z + R_C} \exp(-j 2\pi \frac{2l}{\lambda}) \right]$

si on pose $k = \frac{Z - R_C}{Z + R_C}$ on écrit :

$Z \epsilon = \frac{U(A)}{I(A)} = R_C \frac{1 + k \exp(-j 2\pi \frac{2l}{\lambda})}{1 - k \exp(-j 2\pi \frac{2l}{\lambda})}$

A.5 : si $Z = -jX$, k s'écrit : $k = \frac{-jX - R_C}{-jX + R_C}$

soit $k = \frac{-(R_C + jX)}{R_C - jX}$

- k se calcule comme le rapport de 2 nombres complexes conjugués.

son module sera égal à 1, et si θ est son argument, on écrit :

$-k = \exp(j\theta)$ soit $k = -\exp(j\theta)$

$\theta = \arg(-k) = 2 \arg(R_C + jX)$ (propriété des nombres complexes conjugués)

d'où $\frac{\theta}{2} = \arg(R_c + jX)$.

X est positif, ainsi que R_c . on aura sans ambiguïté. $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{X}{R_c}$

on remplacera $\frac{1}{Z_E}$ par $-\exp(-j\theta)$ dans l'expression de Z_E ,

on aura donc:
$$Z_E = R_c \frac{1 - \exp[j\theta - j2\pi \frac{\ell}{\lambda}]}{1 + \exp[j\theta - j2\pi \frac{\ell}{\lambda}]}$$

avec la relation donnée dans la question:

$$Z_E = jR_c \tan \left[2\pi \frac{\ell}{\lambda} - \frac{\theta}{2} \right]$$

A.6: Si l'extrémité est en court-circuit, on aura $X = 0$ et $\theta = 0$

l'expression de Z_E sera $Z_E = jR_c \tan 2\pi \frac{\ell}{\lambda}$

Application numérique

si $Z_E = jL\omega$ on calcule $L = 64,3 \text{ nH}$.

A.7: on trouve $|Z_E| = 115 \Omega$ soit $L = 40,9 \text{ nH}$.

B: Etude de l'oscillateur

B.1: $Y' = C_1 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

B.2: $X_1 = jL'\omega + \frac{1}{jC\omega}$; $X_2 = \frac{1}{jC\omega}$; $X_3 = \frac{1}{jC\omega}$

$X_1 + X_2 + X_3 = 0$ donnera: $L'\omega_L = \frac{1}{j\omega_L} + \frac{2}{C\omega_L}$
 soit $\omega_L^2 = \frac{1}{L'} \left(\frac{1}{Y'} + \frac{2}{C} \right)$ ou encore $\omega_L = \frac{\sqrt{\frac{C_1 C_2 Y'}{Y' + 2C}}}{\sqrt{L'}}$

$C = 56 \text{ pF}$, et Y' aura pour valeur maximale: $Y' = C_1 + C_2 = 164 \text{ pF}$,

valeur obtenue lorsque C_3 est infini.

on vérifie donc que $C \gg Y'$ et on simplifie la relation donnant ω_L :

on obtient $\omega_L = \frac{1}{\sqrt{L'Y}}$

B.3 - on trouve:

pour $V_{P1} = 3,0 \text{ V}$

$V_{P2} = 6,0 \text{ V}$

la variation de la

$\alpha = \frac{1}{2}$

on peut calculer $\delta Y'$ de

ou bien δ

B.4 - la relation donne

soit $4\pi^2 f_L$

si L' reste constant

Application numérique

B.5 - on a trouvé δ

et δ

on en déduit δu

Application numérique

C-1
$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{2,4}{(1 + jRC\omega)^2}$$

Pour $\omega = 2\omega_A$ $|H_1(2j\omega_A)| = \frac{2,4}{1 + (2RC\omega_A)^2} = 4,3 \cdot 10^{-3}$

L'amplitude du terme V_p est égale à :

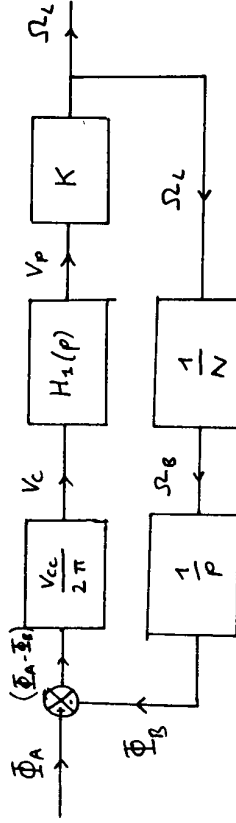
$$V_p = |H_1| V_C = 17 \text{ mV}$$

Le filtre passe-bas sert à éliminer le terme $v_C(t)$

$$H_1(p) = \frac{2,4}{(1 + RCp)^2}$$

C-2
$$w_B(t) = \frac{dV_B}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\Phi_B(p)}{\Omega_B(p)} = \frac{1}{P}$$



avec
$$H_1(p) = \frac{2,4}{(1 + RCp)^2}$$

C-4 On aura en plus un bloc $\frac{1}{P}$ pour passer de Ω_A à Φ_A

$$\Phi_A - \Phi_B = \frac{\Omega_A}{P} - \frac{\Omega_B}{P} = \frac{1}{P} (\Omega_A - \Omega_B)$$

Le bloc $\frac{1}{P}$ peut être transféré dans la chaîne directe après le constructeur



Le rote étant échangé.

On se ramène bien au schéma de la figure 8

avec
$$H(p) = \frac{1}{P} \times \frac{V_{CC}}{2\pi} \times H_1(p) \times K$$

$$= \frac{2,4 K V_{CC}}{P(1 + RCp)^2} = \frac{H_0}{P(1 + \frac{R}{\omega_i})^2}$$

avec $H_0 = \frac{2,4 K V_{CC}}{2\pi} = 2,17 \cdot 10^7$ arrondi à $2,15 \cdot 10^7$

$\omega_1 = \frac{1}{RC} = 6,67 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ arrondi à $6 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

5 En continu $\omega \rightarrow 0$ $|H(j\omega)| \rightarrow \infty$

L'entrée $(\Omega_A - \Omega_B)$ est donc nulle

$$\Rightarrow \omega_A = \omega_B = \frac{\omega_L}{N}$$

soit $\omega_L = N \omega_A$

$$f_L = N f_A$$

-6 * $N_1 = \frac{447800}{12,5} = 35824$

* Entre deux canaux consécutifs, l'écart de fréquence est égal à 12,5 kHz

7 a) Asymptotes : * $\omega \ll \omega_1$ $I(j\omega) = \frac{H_0}{j\omega N}$

$G = 20 \log |I| = 20 \log \frac{H_0}{N} - 20 \log \omega$

droite de pente -20dB/décade passant par le point $\omega = 600 \text{ rad/s}$ $G = 0 \text{ dB}$

* $\omega \gg \omega_1$ $\text{Arg } I = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$

$I(j\omega) = -\frac{H_0 \omega_1^2}{N j \omega^3}$ $G = 20 \log \frac{H_0 \omega_1^2}{N} - 60 \log \omega$

droite de pente -60dB/décade passant par le point $\omega = 6 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ $G = -20 \text{ dB}$

$\text{Arg } I = -\frac{3\pi}{2} = -270^\circ$

Pour $\omega = \omega_1 = 6 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

$G = -28 \text{ dB}$

$\text{Arg } I = -\pi = -180^\circ$

voir courbes sur feuille réponse

Condition de stabilité en bande fermée:

Lorsque $\text{Arg } I = 180^\circ$ il faut que $G < 0 \text{ dB}$
(ou $|I| < 1$)

C-7 b) $G = 0 \text{ dB}$ pour $\omega = 600 \text{ rad/s}$

$\text{Arg } I = -90^\circ - 2 \text{ Arctg } \frac{\omega}{\omega_1} = -101,4^\circ$

La marge de phase est égale à $180^\circ - \text{Arg } I = 78,6^\circ$
Le système est très stable

C-8 a) $H'(p) = \frac{H(p)}{1 + \frac{H(p)}{N}} = \frac{H_0}{p + \frac{H_0}{N}} = \frac{\Omega_L(p)}{\Omega_A(p)}$

C-8 b) on en déduit $\Omega_L(p) \left(p + \frac{H_0}{N} \right) = H_0 \Omega_A(p)$

$\Omega_L(p) \left(\frac{Np}{H_0} + 1 \right) = N \Omega_A(p)$

lorsqu'on passe aux fonctions du temps

$\omega_L(t) + \frac{N}{H_0} \frac{d\omega_L}{dt} = N \omega_A$

C-8 c) solution générale sans 1^{er} second membre

$\omega_L = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{N_2}{H_0}$

solution particulière

$\omega_L = N_2 \omega_A$

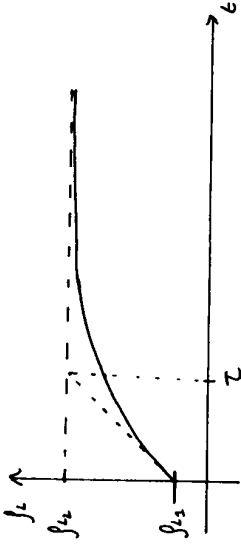
à $t = 0$ $\omega_L = A + N_2 \omega_A = \omega_{L_0} = N_1 \omega_A$
 $\Rightarrow A = (N_1 - N_2) \omega_A$

$\omega_L(t) = N_2 \omega_A + (N_1 - N_2) \omega_A e^{-\frac{t}{\tau}}$

valeur initiale $f_{L_1} = 447,8 \text{ MHz}$

valeur finale $f_{L_2} = N_2 f_A = 448,3 \text{ MHz}$

constante de temps $\tau = \frac{N_2}{H_0} = 1,67 \text{ ms}$



C-8 d. $f_L = 448,3 \cdot 10^6 \approx 0,5 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{t}{\tau}}$
on cherche l'instant t tel que
 $448,3 \cdot 10^6 - f_L = 1 \text{ kHz}$
soit $0,5 \cdot 10^6 e^{-\frac{t}{\tau}} = 10^3$

$t = \tau \ln 500 = 6,2 \tau$

$t = 10 \text{ ms}$

