

Epreuve de Physique Appliquée à l'électronique

(durée 4h00) Coefficient:4

Le problème se compose de deux parties indépendantes. La première partie est elle-même subdivisée en deux ensembles de questions (I) et (II) indépendantes.

Rappels de mathématiques :

Si un nombre réel x est tel que $|x| \ll 1$, alors on peut écrire :

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx$$

Transformation trigonométrique :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

La pulsation instantanée d'un signal $y(t) = Y \sin \theta(t)$ est par définition :

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Mesure de l'excentricité d'un conducteur isolé.

Le banc de mesure est placé sur la ligne d'extrusion, son rôle est de déterminer en continu les caractéristiques dimensionnelles de fils et de câbles isolés.

La mesure des caractéristiques est basée sur les principes physiques suivants :

La mesure du diamètre s'effectue selon un procédé optique à rayon laser.

La mesure de l'excentricité de l'âme par rapport à l'isolant utilise les propriétés de l'induction magnétique.

Dans cette épreuve, on se limitera à la partie relative à la mesure de l'excentricité.

1^{ère} Partie : Etude de la tête de mesure.

Le capteur (fig.1) constitué par une bobine, est inséré dans un oscillateur à réaction où il joue le rôle de l'élément inductif du circuit résonant.

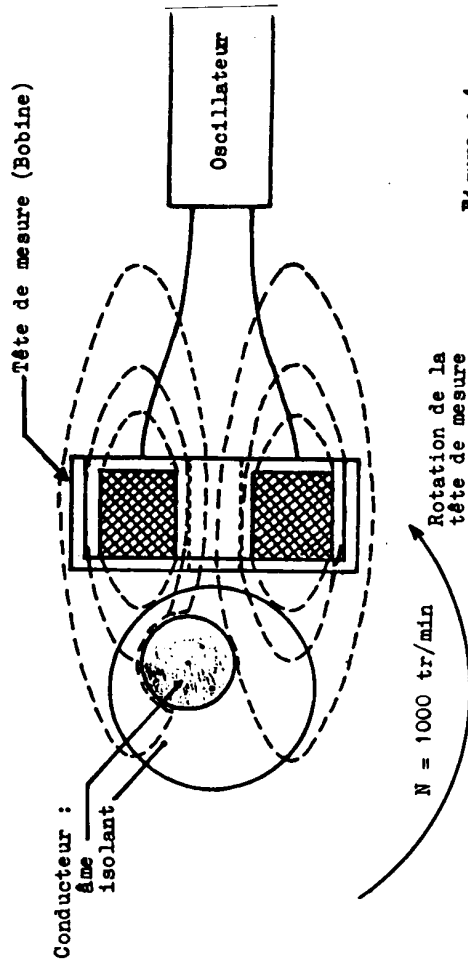


Figure : 1

La rotation de la tête de mesure associée au défilement du conducteur fait que le système décrit autour du conducteur une courbe hélicoïdale ; la tête de mesure effectue $N = 1000$ tr/min autour du conducteur.

Ceci permet de mesurer en continu l'épaisseur de l'isolant et d'en déduire l'excentricité de l'âme du conducteur.

La bobine parcourue par un courant haute-fréquence, produit dans l'espace environnant un champ magnétique variable.

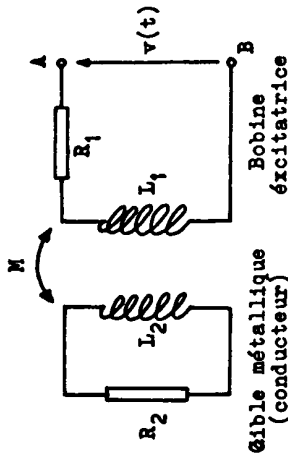
Tout objet métallique placé dans cette zone est le siège de courants de Foucault qui, d'après la loi de Lenz, s'opposent à la cause qui leur a donné naissance :

Ces courants induits créent un champ magnétique qui réagit sur celui généré par la bobine, ce qui a pour effet de modifier le modèle équivalent de la bobine.

L'influence des courants de Foucault est d'autant plus grande que la distance entre la bobine et le matériau conducteur est faible.

I. Modélisation de l'ensemble "Conducteur-Bobine".

Dans le but de trouver un modèle équivalent à l'ensemble "Conducteur Bobine", on réduit la cible métallique à un circuit à constantes localisées de caractéristiques : R_2, L_2 (fig. 2) couplé par inductance mutuelle à la bobine.



La bobine excitatrice (R_1, L_1) est alimentée par une tension sinusoïdale $v(t)$ de pulsation Ω générée par un oscillateur.
 $M = k \sqrt{L_1 \cdot L_2}$: est le coefficient d'inductance mutuelle, ($k < 1$).

figure 2

I.1 Déterminer l'impédance, vue entre A et B, équivalente à l'ensemble "Conducteur-bobine" en fonction de R_1, R_2, L_1, L_2, M et Ω .

En déduire un modèle équivalent série en donnant l'expression littérale de chacun des éléments R et L .

I.2 Dans le cas où la cible est un matériau très conducteur on a :

$$R_2 \ll L_2 \Omega$$

En déduire les expressions simplifiées des éléments du modèle équivalent en fonction de R_1, R_2, L_1, L_2 et k coefficient de couplage entre L_1 et L_2 .

I.3 L'excentricité du conducteur a pour effet de modifier la distance entre l'âme du conducteur et la bobine excitatrice L_1 ; ceci se traduit par une variation du coefficient de couplage k .

Du fait de la rotation de la tête de mesure autour du conducteur, on peut considérer que pour une excentricité donnée, le coefficient de couplage k varie sinusoidalement autour d'une valeur moyenne k_0 ; soit :

$$k = k_0 + \Delta k \cos \omega t.$$

I.3.1 Calculer la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ de variation du coefficient de couplage k .

On rappelle que $N = 1000$ tr/min.

I.3.2 Montrer que si $\Delta k \ll k$, les expressions des éléments du modèle équivalent peuvent se mettre sous la forme :

$$R = R_1 + R_0 (1 + a \cos \omega t)$$

$$L = L_0 (1 - b \cos \omega t)$$

Expliciter R_0, L_0, a et b , en fonction de R_1, R_2, L_1, L_2, k_0 et Δk .

Donner la signification de R_0 et L_0 .

I.4. la mesure de l'excentricité du conducteur utilise uniquement la variation d'inductance.

Pour un conducteur en cuivre isolé dont les caractéristiques sont :

\varnothing extérieur = 1,5mm, $\varphi_{\text{ame}} = 1$ mm, excentricité = 0,1mm, on obtient : $k_0 = 0,2$ et $\Delta k = 1,25 \cdot 10^{-2}$

L'inductance propre de la bobine excitatrice vaut : $L_1 = 75 \mu\text{H}$. Calculer dans ce cas, les valeurs numériques de L_0 et b .

II. Etude de l'oscillateur sinusoïdal de type "colpitts".

La bobine excitatrice étant insérée dans un oscillateur sinusoïdal où elle joue le rôle de l'élément inductif, on se propose de déterminer les conditions d'oscillation et d'étudier l'influence de l'excentricité d'un conducteur sur le signal généré par l'oscillateur.

II.1. Un oscillateur à réaction comporte deux quadripôles associés de la manière suivante :

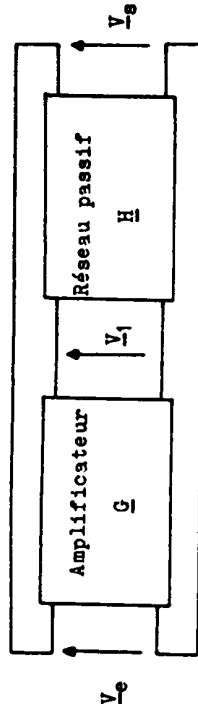


figure 3

Dans la pratique, pour ce type d'oscillateur, l'amplificateur non sélectif fonctionne à la limite du régime non-linéaire et le réseau passif est linéaire.

II.1.1 Précisez le rôle de chacun des quadripôles qui constituent l'oscillateur.

Dire pourquoi le signal à l'entrée de l'oscillateur $v(t)$ est sensiblement sinusoïdal, même si l'amplificateur sort quelque peu du régime linéaire.

II.1.2 Ecrire la condition limite d'entretien des oscillations.

II.2 Le schéma de l'oscillateur est le suivant :

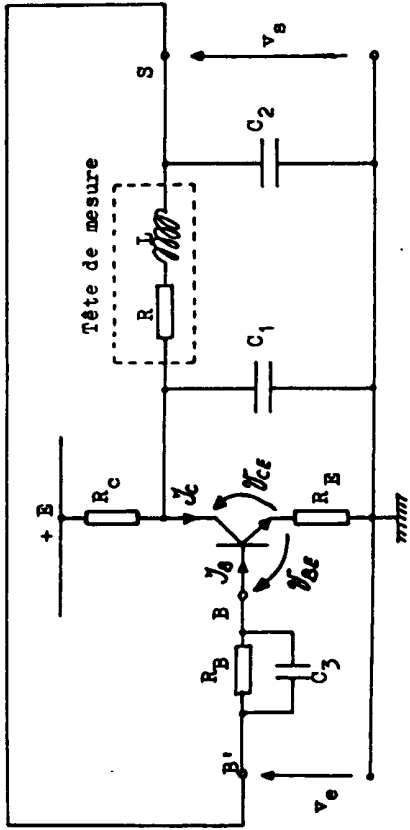


figure 4

On donne : $R_C = 3,9 \text{ k}\Omega$, $R_E = 90 \Omega$, $C_1 = 5,11 \text{ nF}$, $C_2 = 3,86 \text{ nF}$.

L'impédance présentée par la capacité C_3 est négligeable à la fréquence de travail.

En régime dynamique le transistor est décrit par le modèle de la figure 5 dans lequel i_b , v_{be} , i_c et v_{ce} constituent respectivement les variations des grandeurs totales \mathcal{I}_b , \mathcal{V}_{be} , \mathcal{I}_c , \mathcal{V}_{ce} .

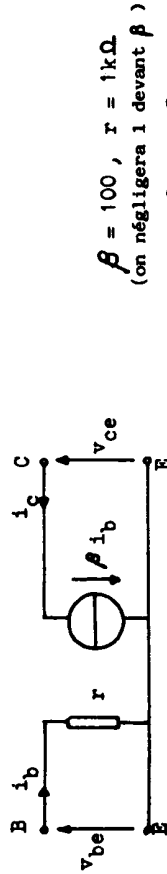


figure 5

Dessiner un modèle dynamique de l'ensemble du circuit que l'on présentera de manière à faire apparaître à gauche la tension d'entrée v_e et à droite la tension de sortie v_s .

II.3 Afin de déterminer les conditions d'oscillation, on suppose ouverte la boucle de réaction SB' de l'oscillateur.

II.3.1 Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée

$$Z_e = \frac{V_e}{I_e} \text{ de la chaîne ouverte}$$

Ecrire la condition que doit remplir $|Z_e|$ pour que son influence sur la sortie de la chaîne soit négligeable lors de la fermeture de celle-ci.

II.3.2 En supposant que la condition précédente est vérifiée, déterminer la transmittance en chaîne ouverte du système :

$$\underline{T}(j\Omega) = \frac{V_s}{V_e}$$

II.3.3 Quelles sont, en fonction des éléments du montage, les conditions sur $\underline{T}(j\Omega)$ pour que les oscillations puissent exister.

II.4 On se place dans le cas où l'excentricité du conducteur est nulle par conséquent : $L = L_0 = 72 \mu\text{H}$ et $R = R_1 + R_0 = 75 \Omega$

II.4.1 Déterminer l'expression littérale de la pulsation Ω_0 des oscillations en écrivant que la condition de phase est vérifiée. Montrer que compte-tenu de la valeur des éléments, Ω_0 ne dépend pratiquement que de L_0 , C_1 et C_2 .

(on conservera cette expression simplifiée pour la suite du problème. Calculer la valeur numérique de la fréquence F_0 des oscillations.

II.4.2 Montrer que la condition sur l'impédance d'entrée Z_e est vérifiée

II.4.3 On pose $A_{v0} = \frac{R_C \beta}{r + \beta R_E}$, soit $A_{v0} = 39$

Déterminer en fonction de R , R_C , C_1 , C_2 et L_0 , la valeur minimale de A_{v0} pour qu'il y ait entretien des oscillations. Commentez brièvement.

II.5 On se propose maintenant d'évaluer l'influence de l'excentricité du conducteur sur la fréquence du signal généré par l'oscillateur.

Dans ce cas, l'expression de L est :

$$L = L_0 (1 - b \cos \omega t) \text{ avec } b \ll 1.$$

Montrer que dans ces conditions, la pulsation des oscillations peut s'écrire :

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega \cos \omega t$$

Expliciter $\Delta\Omega$, puis calculer la variation maximale de fréquence ΔF pour $b = 5,2 \cdot 10^{-3}$.

Quel est le type de modulation qui en résulte ?

Calculer le taux de modulation de fréquence $m = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}$.

2^{ème} partie : Traitement du signal d'excentricité.

La fréquence du signal généré par l'oscillateur est divisée par deux.

Le nouveau signal modulé en fréquence a une amplitude constante, il est noté $v_e(t)$.

Afin d'obtenir une information proportionnelle à l'excentricité du conducteur $v_e(t)$ est démodulé à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase puis filtré.

I. Démodulation de fréquence.

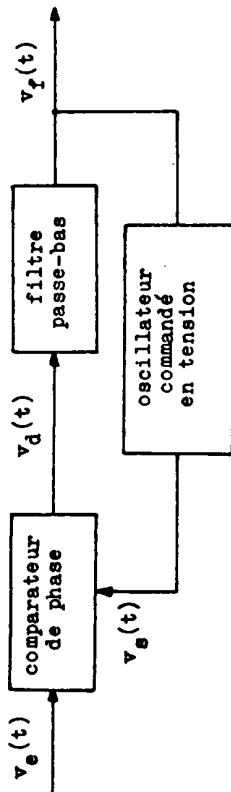


Figure ---- 6

On considère que la boucle à verrouillage de phase reçoit un signal d'entrée :

$$v_e(t) = V_e \sin[\Omega_0 t + \varphi_e(t)]$$

$$v_s(t) = V_s \cos[\Omega_0 t + \varphi_s(t)]$$

et délivre un signal :

La pulsation Ω_0 est constante tandis que les phases $\varphi_e(t)$ et $\varphi_s(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps.

La boucle à verrouillage de phase est constituée des sous-ensembles suivants :

- un comparateur de phase qui élabore la tension :

$$v_d(t) = K_d [\varphi_e(t) - \varphi_s(t)]$$

- un filtre passe-bas de transmittance $\underline{F}(j\omega)$ et de pulsation de coupure ω_c telle que : $\omega_c \ll \Omega_0$

- un oscillateur commandé en tension qui délivre un signal :

$$v_s(t) = V_s \cos[\Omega_0 t + \varphi_s(t)]$$

de pulsation instantanée $\Omega_s(t) = \Omega_0 + \frac{d\varphi_s(t)}{dt}$ telle que $\frac{d\varphi_s(t)}{dt} = K_o v_f(t)$

I.1. Représenter le schéma fonctionnel de la boucle à verrouillage de phase en prenant pour grandeur d'entrée $\varphi_e(j\omega)$ et pour grandeur de sortie $v_f(j\omega)$.

On précisera sur le schéma fonctionnel les transmittances complexes des différents blocs et la place des diverses grandeurs : $\varphi_e, v_d, v_f, \varphi_s$ et $\Delta\varphi = (\varphi_e - \varphi_s)$

I.2. Déterminer l'expression de la transmittance complexe :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{v_f}{\varphi_e} \text{ en fonction de } K_o, K_d, \omega \text{ et } \underline{F}(j\omega)$$

I.3. a) Le signal d'entrée de la boucle à verrouillage de phase est modulé en fréquence, soit :

$$v_e(t) = V_e \sin \left[\Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega} \sin \omega t \right]$$

avec : $F_o = \frac{\Omega_0}{2\pi} = 200 \text{ kHz}$, $\Delta F = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = 520 \text{ Hz}$, $f = \frac{\omega}{2\pi} = 16 \text{ Hz}$.

Donner dans ce cas, l'expression littérale de $\varphi_e(t)$; en déduire $\varphi_e(j\omega)$.

b) Le filtre passe-bas de transmittance $\underline{F}(j\omega)$ est considéré comme idéal ; sa courbe de gain est donnée par la figure N°7. Sa fréquence de coupure f_c est telle que :



figure 7

Quelle est dans ce cas l'expression de la transmittance

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{v_f}{\varphi_e}$$

c) Que devient cette expression si $K_o K_d \gg 1$?

d) On suppose cette condition réalisée. Ecrire l'expression de $v_f(t)$ en fonction de $K_o, K_d, \Delta\Omega, \omega$ et t . Commentez.

e) calculez l'amplitude de la tension de sortie $v_f(t)$ pour :

$$K_o = 43,5 \cdot 10^3 \text{ rad/s/V}, K_d = 4,36 \text{ V/rad}, \Delta F = 520 \text{ Hz}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 16 \text{ Hz}$$

II) Modélisation de l'ensemble "Condensateur - bobine":

1)
$$\begin{cases} \underline{V} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \\ 0 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega L_1 \underline{I}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{V} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + \frac{\omega^2 L_1^2}{R_2 + j\omega L_2} \underline{I}_1$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = R_1 + \frac{\omega^2 L_1^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} + j\omega \left(L_1 - \frac{\omega^2 L_1^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \right)$$

2) si $R_2 \ll \omega L_2$

$$R_{eq} = R_1 + k^2 \frac{L_1 R_2}{L_2} \quad \text{et} \quad L_{eq} = L_1 (1 - k^2)$$

3) Le système tourne à 1000 tr/min \rightarrow la fréquence de variation de k est 16,6 Hz

$$R_{eq} \approx R_1 + \frac{L_1 R_2}{L_2} k_0^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta k}{k_0} \cos \omega t \right)$$

$$L_{eq} \approx L_1 (1 - k_0^2) \left(1 + 2 \frac{\Delta k}{k_0} \cos \omega t \right)$$

d'où:
$$a = \frac{2 \Delta k}{k_0} \quad b = \frac{2 R_2 \Delta k}{1 - k_0^2}$$

$$L_0 = L_1 (1 - k_0^2)$$

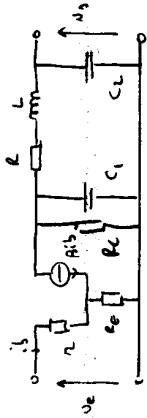
si l'exacrité est nulle $R_{eq} = R_1 + k_0$ R_0 traduit le pole de la conductance

$L_{eq} = L_0$ L_0 traduit à une influence non l'inductance de la bobine

4) $L_0 = 72 \mu H$ $b = 5,2 \cdot 10^{-3}$

II) Constatation Coefficient:

1) 2) Condition d'absence de oscillation: $H(j\omega) \cdot G(j\omega) = 1$



3) impédance d'entrée: $Z_e = r + \beta R_e$ négative si: $|z_e| \gg \frac{1}{G_1}$

4)
$$\underline{I}(j\omega) = - \frac{\beta R_c}{n + \beta R_e} \frac{1}{1 - LC_1\omega^2 - RC_1C_2\omega^2 + j\omega(RC_1 + RC_2 - LC_1RC_2\omega^2 + RC_2)}$$

$$\underline{I}(j\omega) > 1 \Rightarrow \begin{cases} RC_1 + RC_2 = RC_2 - LC_1RC_2\omega^2 = 0 \\ -\frac{\beta R_c}{n + \beta R_e} \cdot \frac{1}{1 - LC_1\omega^2 - RC_1C_2\omega^2} = 1 \end{cases}$$

Le système oscille à ω_0 valeur que
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{RC_1 + RC_2(C_1 + C_2)}{LC_1C_1RC_2}}$$

et puisque $R = 75 \Omega \ll RC_2$
$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{4000 \text{ Hz}}{2\pi}$$

Vérification: $Z_e = n + \beta R_e = 10 \Omega \gg \frac{1}{G_1} = 10 \Omega$ \rightarrow approximation érigée.

Valeur mini de A_{vo} : $A_{vo} \geq -1 + LC_1\omega_0^2 + RC_1C_2(C_1\omega_0^2) = 37,2$

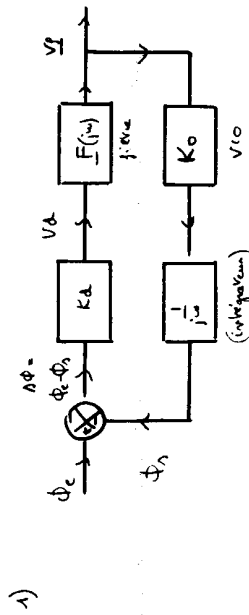
ici $A_{vo} = 39 > 37,2 \rightarrow$ les oscillations disparaissent

5)
$$\omega(H) = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L_0 C_1 C_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - b \cos \omega t}} \approx 30 \left(1 + \frac{b}{2} \cos \omega t \right)$$
 Car les p. de l'oscillation sont comme l'exacrité

$$F(H) = F_0 \left(1 + \frac{b}{2} \cos \omega t \right) \quad \Delta F = F_0 \frac{b}{2} = 40 \text{ kHz}$$

$$m = \frac{\Delta F}{f} = \frac{4000}{16,6} = 240$$

III) Traitement du signal d'exercité:



2) $\frac{V_E}{\phi_E} = \frac{K_A \cdot F(j\omega)}{1 + K_A \frac{F(j\omega) K_0}{j\omega}}$

3) $\phi_E(t) = \frac{\Delta \Omega}{\omega} \sin \omega t \rightarrow \phi_E(j\omega) = \frac{\Delta \Omega}{\omega}$

si le bloc est idéal $|F(j\omega)| = 1$ pour la fréquence réglée

$\Rightarrow I(j\omega) = \frac{K_A}{1 + K_A \frac{K_0}{j\omega}}$

si $\frac{K_A K_0}{j\omega} \gg 1$ alors $I(j\omega) = \frac{j\omega}{K_0}$

alors $v_f(t) = \frac{\Delta \Omega}{\omega} \cdot \frac{j\omega}{K_0} \cdot \sin(\omega t + \phi_E)$ $V_A \xrightarrow{\text{amplitude } \propto \frac{\Delta \Omega}{K_0}} V_f$
 $\xrightarrow{\text{déphasage } \phi_E}$

$v_f(t) = \frac{\Delta \Omega}{K_0}$ l'amplitude v_f n'est rattachée à la variation de fréquence du signal d'entrée $\rightarrow v_f$ est l'image de l'exercité des conducteurs

AN: la variation de v_f sur l'amplitude $\frac{\Delta \Omega}{K_0}$