

Exercice de Physique appliquée

Note aux candidats: Rappels de quelques résultats mathématiques

1. Lorsque le nombre  $x$ , réel, est très petit devant l'unité, on peut écrire :

$$(1-x)^2 \approx 1 - 2x \quad ; \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+kx} \approx 1 - kx$$

2. Si  $p(t)$  est une fonction périodique impaire de la variable  $t$ , de période  $T$  telle que  $T = 2\pi/\omega$ , alors  $p(t)$  peut se mettre sous la forme :

$$p(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin(n\omega t)$$

avec :

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad \text{et} \quad P_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin(n\omega t) dt$$

**A - Première partie (7 points)**

On se propose d'étudier un montage utilisé pour contrôler les caractéristiques des triacs.

Pour cela, on considère le circuit représenté sur la figure 1, comportant un condensateur de capacité  $C$ , préalablement chargé par connexion à une source de tension établie de f.é.m.  $E$ , une bobine qu'on modélise par son inductance  $L$  et sa résistance  $r_1$ , une résistance de valeur  $r_2$ , et un triac T.

On pose  $r = r_1 + r_2$ .

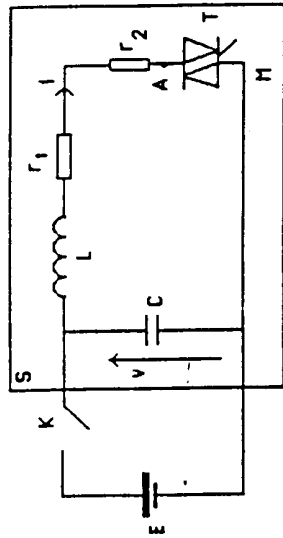


Figure 1

Le triac T est amorcé à la date  $t=0$ . Un courant d'intensité  $i(t)$  s'établit alors :  $i(t)$  passe par une valeur maximale  $I_m$ , puis décroît et s'annule à la date  $t_1$ .

On s'intéresse à la valeur absolue  $v = \left| \frac{di}{dt} \right|$  du taux de variation de l'intensité  $i(t)$ , à la date  $t_1$ , où le courant s'annule, car, pour certaines valeurs de  $r$ , le triac se maintient de lui-même en conduction après le passage par 0 de l'intensité  $i(t)$ .

Dans cette première partie on se propose de mettre au point, par approximations successives, un modèle mathématique permettant de déterminer les valeurs de la f.é.m.  $E$  de la source de tension utilisée pour charger le condensateur, de l'inductance  $L$  de la bobine et de la capacité  $C$  du condensateur, de manière à obtenir les valeurs de  $r$  souhaitables.

1. Quelle est, avant l'amorçage du triac, l'énergie électrique  $W_0$  du système S relié à l'intérieur du rectangle de la figure 1 ?
2. En première approximation, on néglige toutes les causes de pertes d'énergie (la conductance du condensateur est supposée nulle, on pose  $r_1 = r_2 = 0$ , et  $v_{AK} = 0$  quand T conduit).

- 2.1. Préciser les valeurs de  $v(t)$  et de  $i(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ .
- 2.2. Montrer, par des considérations énergétiques, que lorsque le condensateur est totalement déchargé, l'intensité  $i$  est maximale. Calculer sa valeur maximale  $I_m$  en fonction de  $E, C$  et  $L$ .

- 2.3. Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait  $i(t)$  entre 0 et  $t_1$ .
- 2.4. Donner l'expression de  $i(t)$  (on posera  $LC\omega_0^2 = 1$ ). Dessiner l'allure de  $i(t)$  pour  $t$  variant de 0 à  $t_1$ .

- 2.5. Etablir les expressions, en fonction de  $E, C, L$ , de  $t_1$ , de  $r$ , et de la valeur efficace  $I$  de  $i(t)$  entre 0 et  $t_1$ .

- 2.6. Application numérique: Calculer les valeurs de  $I_m$ , de  $r$ , et de  $t_1$  pour  $E=30V, C=100 \mu F$  et  $L=10 mH$ .

3. On se propose d'évaluer, dans la mesure où elle reste faible devant  $W_0$ , la perte d'énergie  $W_p$  du système S au cours de la première alternance du courant; pour cela, on suppose que la forme précédente de  $i(t)$  reste inchangée en présence de pertes.

- 3.1. Montrer que l'énergie perdue entre les dates 0 et  $t_1$  dans la résistance totale  $r$  peut se mettre sous la forme:

$$W_p = W_0 \frac{\pi r}{f(L, C)}$$

où  $f(L,C)$  est une fonction simple de  $L$  et de  $C$ .

Application numérique : quelle est la valeur  $r_{max}$  de  $r$  qui, pour les valeurs numériques données ci-dessus, correspond à une valeur de  $W_{p1}$  égale à 10% de l'énergie initiale  $W_0$  ?

3.2. On suppose que pendant que le triac conduit, la tension  $V_{M1}$  à ses bornes est constante et l'on note  $V_d$  cette tension. Montrer que, dans ces conditions, l'énergie  $W_{p2}$  perdue entre 0 et  $t_1$  peut s'écrire sous la forme :

$$W_{p2} = W_0 g \left( \frac{V_d}{E} \right)$$

où  $g$  est une fonction simple du rapport  $(V_d/E)$ .

Application numérique : Quelle est la valeur  $E_{min}$  de  $E$  qui correspond à une valeur de  $W_{p2}$  égale à 10% de l'énergie initiale  $W_0$  si  $V_d = 0,5 V$  ?

3.3. On estime la perte d'énergie du système  $S$  entre 0 et  $t_1$  par le quantième  $W_p = W_{p1} + W_{p2}$  (c'est en cela que réside la modélisation). Montrer que si  $\gamma_1$  désigne la tension aux bornes du condensateur à l'intant  $t_1$  où le courant s'annule, et si on a le fois  $r < r_{max}$  et  $E > E_{min}$ , cette approximation conduit à l'expression :

$$|V_1| = E \left[ 1 - \frac{r \tau}{2 f(L,C)} - \frac{1}{2} g \left( \frac{V_d}{E} \right) \right]$$

3.4. Etablir la relation entre  $|V_1|$  et  $\tau$  (et les paramètres  $L$  et  $V_d$ ).

En déduire la nouvelle estimation corrigée  $\tau_0$  de  $\tau$ .

Application numérique : calculer le valeur de  $\tau_0$  pour  $E = 30 V$ ,  $L = 10 mH$ ,  $C = 100 \mu F$ ,  $r = 0,2 \Omega$ ,  $V_d = 0,5 V$ .

**B. Deuxième partie (13 points)**

Les caractéristiques des triacs, et notamment la valeur limite du coefficient  $\alpha$  précèdent, varient avec la température.

Pour tester les variations de ces caractéristiques en fonction de la température, on utilise un essai de température qui est représenté sur la figure 2.

L'étude qui suit est destinée à modéliser le comportement thermique du système que l'on a observé expérimentalement, elle comprend 4 parties **mutuellement indépendantes** :

- 1) étude de la mesure de température,
- 2) détermination d'un modèle thermique,
- 3) étude de la commande de la puissance,
- 4) étude du système essai.

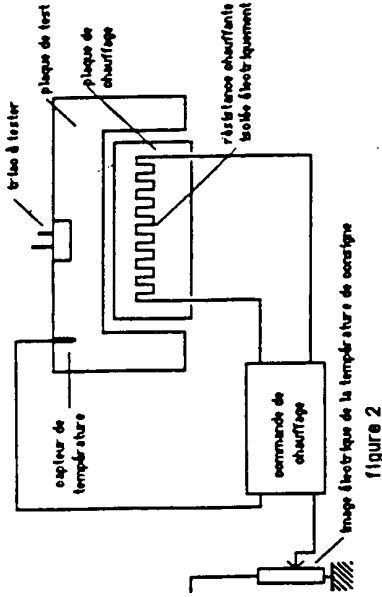


figure 2

**I. Etude de la mesure de température.**

La chaîne de mesure de la température de la plaque de test utilise comme capteur une résistance de platine de valeur  $R_{pt}$ .

En notant  $\theta$  la température exprimée en degrés celsius,  $R_{pt}$  varie selon la loi :

$$R_{pt} = R_0 (1 + \alpha \theta)$$

Dans cette expression,  $R_0$ , résistance à  $0^\circ C$ , vaut  $100 \Omega$ ;  $\alpha$ , coefficient de température, a pour valeur  $3,9 \cdot 10^{-3}$ .

La résistance  $R_{pt}$  est insérée dans le montage représenté sur la figure 3 où l'amplificateur opérationnel est supposé parfait.

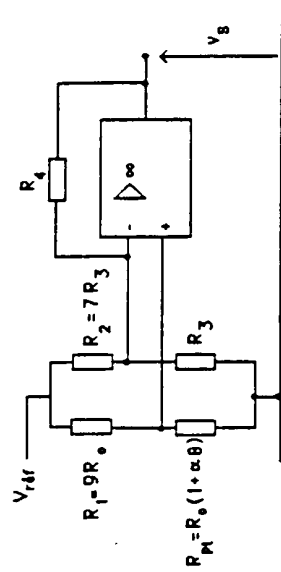


figure 3

1.1. Montrer que ce montage est équivalent à celui de la figure 4.  
 En effectuant un développement limité au premier ordre, montrer que la f.é.m. équivalente  $E^+$  peut se mettre sous la forme  $E^+ = k V_{ref} (1 + \alpha \theta)$ .

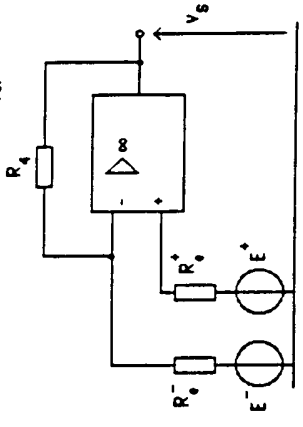


figure 4

Calculer le valeur numérique de  $k$ , ainsi que celle de  $\alpha$  en fonction de  $\alpha$ .  
 Déterminer l'expression de  $E^-$  en fonction de la tension de référence  $V_{ref}$  et de  $R_0^-$  en fonction de  $R_0$ .  
 1.2. Etablir l'expression de  $V_s$  en fonction de  $E^+$ ,  $E^-$ ,  $R_0^+$  et  $R_4$ .  
 1.3. Déterminer le valeur du rapport  $R_4/R_0^-$  puis celle de  $R_0^+/R_0^-$  pour que la tension de sortie  $V_s$  soit nulle lorsque la température  $\theta$  est égale à  $0^\circ C$ .  
 1.4. En supposant la condition précédente réalisée, déterminer le valeur de  $V_{ref}$  pour que  $V_s$  soit égale à 10 V lorsque la température  $\theta$  vaut  $200^\circ C$ .

2. Détermination d'un modèle thermique.

La résistance de chauffage (1) de la figure 5 reçoit une puissance électrique  $P(t)$  dont la transformée de Laplace  $L[P(t)]$  est notée  $P(p)$ .  
 La température  $\theta_3$  de la plaque de test (3) est supposée uniforme, comme la température ambiante  $\theta_0$ ;  $\theta_3$  varie en fonction du temps  $t$  tandis que  $\theta_0$  est supposée constante.  
 La transformée de Laplace de la différence  $\theta_3(t) - (\theta_3 - \theta_0)$  est notée  $T_3(p)$ .  
 L'action de la puissance électrique  $P(t)$  sur la différence de température  $\theta_3(t)$  peut être représentée par la transmittance:

$$H(p) = \frac{T_3(p)}{P(p)}$$

Les températures  $\theta_1$  de la résistance de chauffage et  $\theta_2$  de la plaque chauffante sont également supposées uniformes, on prend comme modèle thermique du dispositif de chauffage des triacs, un modèle à constantes - focalisées qui admet pour analogue électrique le montage représenté sur la figure 6.

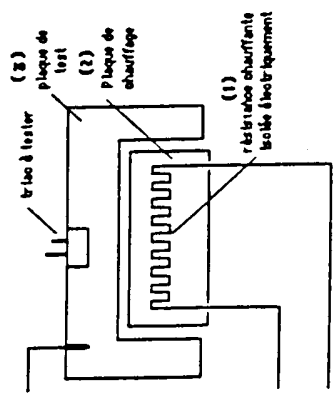


figure 5

Pour ce modèle les mesures ont donné :  
 $R_{th1} = 2 K/W$ ;  $R_{th2} = 4 K/W$ ;  $R_{th3} = 1 K/W$ ;  $R_{th4} = 0,5 K/W$ ;  
 $C_1 = 50 J/K$ ;  $C_2 = 400 J/K$ ;  $C_3 = 1000 J/K$

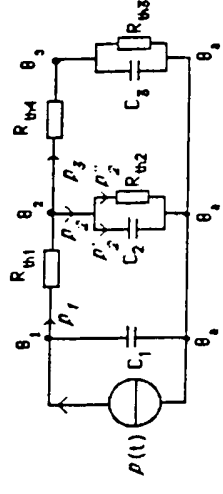


figure 6

- 2.1. Qualifier  $R_{th1}$ ,  $R_{th2}$ , et  $C_2$ .
- 2.2. Ecrire les équations des branches et du nœud concernant les puissances thermiques  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  et  $P_6$ .
- 2.3. On pose:  $\theta_2(t) = (\theta_3 - \theta_0)$ ;  $T_3(p) = L[\theta_3(t)]$ ;  $P_2(p) = L[P_2(t)]$ ;  
 $P_3(p) = L[P_3(t)]$ ;  $T_3 = R_{th2} C_2$ ;  $T_5 = R_{th3} C_3$ .

Le capacite calorifique  $C_1$  de la resistance de chauffage est, en première approximation, considérée elle-même comme négligeable.

Exprimer  $P(p)$  en fonction de  $T_2(p)$  et de  $T_3(p) \dots$  et de  $r_1, r_2, R_{02}$  et  $R_{03}$ .

Exprimer  $T_2(p)$  en fonction de  $T_3(p) \dots$  et de  $R_{03}, R_{04}$  et  $T_3$ .

2.4. La fonction de transfert  $H(p)$  peut être mise sous la forme :

$$H(p) = \frac{H_0}{p^2 + 2m \frac{p}{\omega_0} + 1}$$

Avec les valeurs numériques précédentes, on trouve :  $H_0 = 0,727 \text{ K/W}$  ;  $\omega_0 = 2,62 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$  ;  $m = 1,64$ .

Dessiner l'allure des diagrammes de Bode de  $H(j\omega)$ . Quelle est la valeur de  $H(j\omega)$  pour  $\omega = 0$  ?

2.5. Lorsque la température ambiante  $\theta_a$  est constante, la représentation graphique de la puissance  $P(t)$  a la forme représentée sur la figure 7. Calculer la valeur moyenne  $P_m$  de  $P(t)$  en fonction de  $P_{Max}$  et du rapport cyclique  $\delta$ .

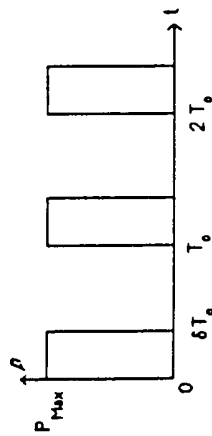


figure 7

Application numérique :  $P_{Max} = 300 \text{ W}$  ; les données de la question précédente restent valables ; calculer  $\delta$  pour que la valeur moyenne de  $\theta_3 = (\theta_3 - \theta_a)$  soit égale à  $105^\circ\text{C}$ .

3. Etude de la commande de puissance

Le chauffage est commandé par un comparateur de type "tout ou rien". Lorsque la température  $\theta_3$  de la plaque de test est inférieure à la température

de consigne  $\theta_c$ , la puissance  $P(t)$  est constante et égale à  $P_{Max}$  ; en revanche lorsque la différence  $d = \theta_c - \theta_3$  est négative, la résistance de chauffage n'est pas alimentée (figure 8).

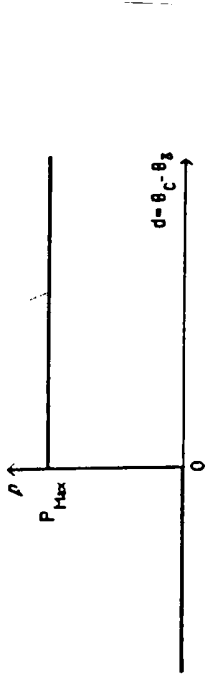


figure 8

Dans le but d'établir un modèle linéaire pour cette fonction non linéaire, on utilise l'approximation du premier harmonique sachant que les harmoniques de  $P(t)$  seront fortement atténués par l'inertie thermique du système.

3.1. On suppose ainsi que la différence  $d = \theta_c - \theta_3$  est une fonction sinusoidale du temps, d'expression :  $d = D_M \sin \omega t$ . Représenter  $d(t)$  et  $P(t)$  sur le même graphique.

3.2. Calculer l'expression de l'harmonique fondamental  $P_1(t)$  de  $P(t)$  ; montrer qu'il est en phase avec  $d(t)$ . Calculer son amplitude  $P_{1M}$ .

3.3. La transformée de Laplace de  $d(t)$  est notée  $D(p)$ , celle de  $P_1(t)$  est appelée  $P_1(p)$ . Exprimer la fonction de transfert  $A_1 = P_1(p) / D(p)$ , puis son inverse  $1/A_1$  en fonction de  $D_M$ .

4. Etude du système asservi

En régime permanent, lorsque  $\theta_a$  est constante, la température  $\theta_3$  oscille autour d'une valeur moyenne fixe, proche de la température de consigne  $\theta_c$ . Pour prédéterminer l'amplitude des oscillations de  $\theta_3$ , on se place dans le cadre de l'approximation du premier harmonique, qui consiste à remplacer la puissance  $P(t)$  par son premier harmonique  $P_1(t)$ , et  $\theta_3$  par sa variation  $\delta\theta_3$  autour de sa valeur moyenne qu'on suppose pour simplifier égale à  $\theta_c$ .

Dans ces conditions, le schéma fonctionnel de la chaîne de régulation de température est donné par la figure 9.

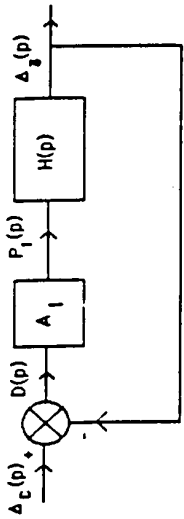


Figure 9

$\Delta_c(p)$  est la transformée de Laplace de  $\delta c(t)$ ;  $\Delta_d(p)$  est la transformée de Laplace de  $\delta d(t)$ , variation éventuelle de la tension de consigne  $\theta_c$ ;  $A_1$  est la fonction de transfert étudiée à la question 3.3.

4.1. Calculer  $\Delta_d(p)$  en fonction de  $\Delta_c(p)$ , de  $H(p)$  et de  $A_1$ .  
 4.2. Ecrire la condition liant  $A_1$  et  $H(j\omega_{so})$ , pour que le système oscille spontanément à la pulsation  $\omega_{so}$ , indépendamment de  $\theta_c$  et de  $\theta_d$ .  
 Montrer que si  $H(p)$  est la fonction de transfert de la partie 2 (questions 2.2 et 2.3), le système ne peut pas osciller.

4.3. En fait, le système réel oscille car la capacité calorifique  $C_1$  n'est pas négligeable, le système thermique n'est pas un système à constantes localisées etc.

Les diagrammes de Bode et de Nyquist correspondent à la fonction  $H(p)$  du système réel ont été tracés expérimentalement. Ils sont donnés respectivement sur les figures 10 et 11.

En utilisant les figures 10 et 11, déterminer la fréquence  $f_{so}$  des oscillations du système ainsi que l'amplitude des oscillations de  $\theta_s$ , lorsque la température ambiante  $\theta_a$  et la température de consigne  $\theta_c$  sont constantes (on prendra encore  $P_{max} = 300 \text{ W}$ ).

Comparer les résultats trouvés au relevé de température de la figure 12.

\*\*\*\*\*

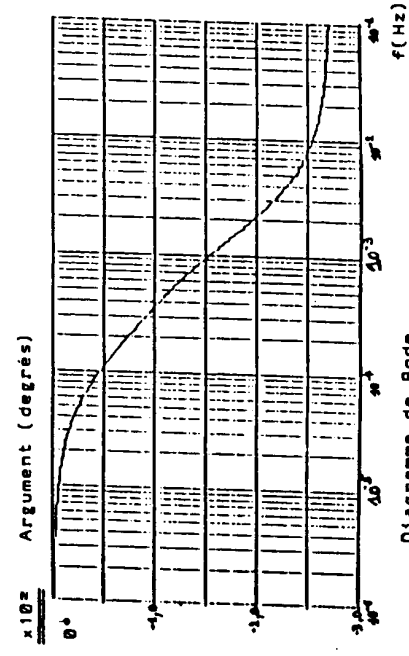
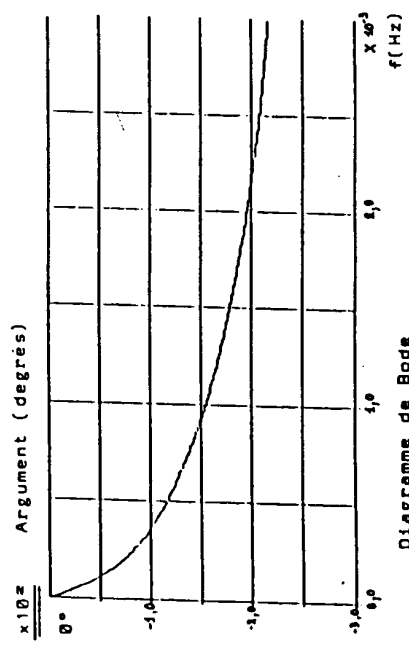
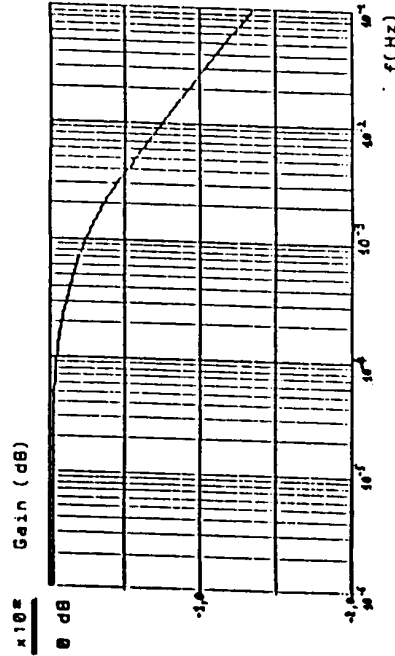
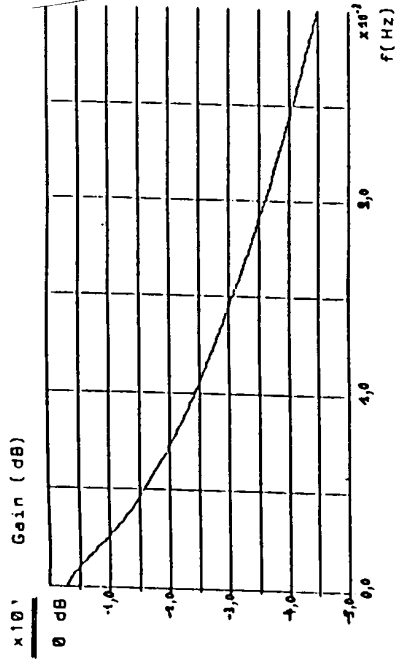


Diagramme de Bode (échelle de fréquence linéaire)

Diagramme de Bode (échelle de fréquence logarithmique)

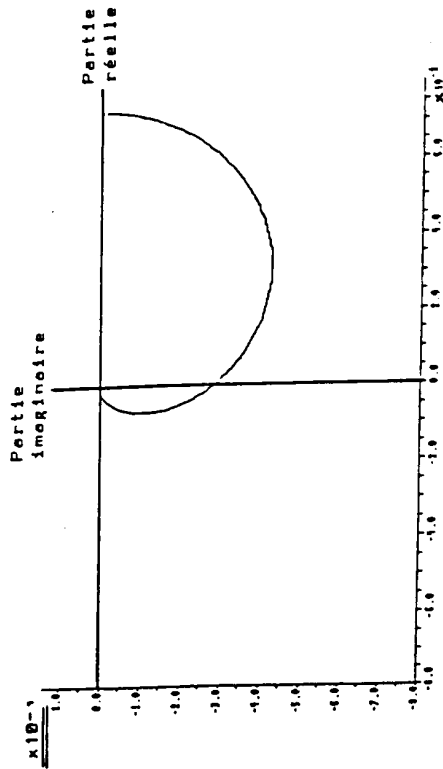


Diagramme de Nyquist

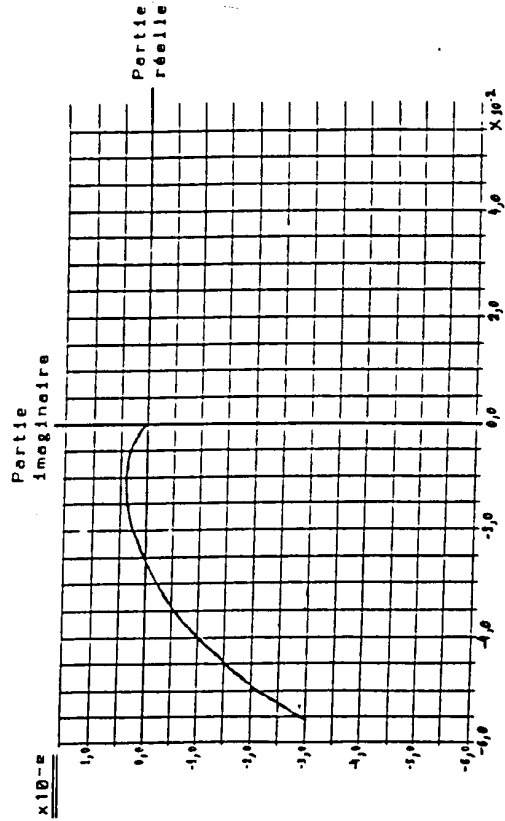


Diagramme de Nyquist (agrandissement autour de l'origine)

Figure 11

Relevé expérimental de température

Température de consigne :  $\theta_c = 125 \text{ }^\circ\text{C}$

Température ambiante :  $\theta_a = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

Puissance maximale de chauffage :  $P_{\text{Max}} = 300 \text{ W}$

$\theta_3$  : température de la plaque de test, en  $^\circ\text{C}$ .

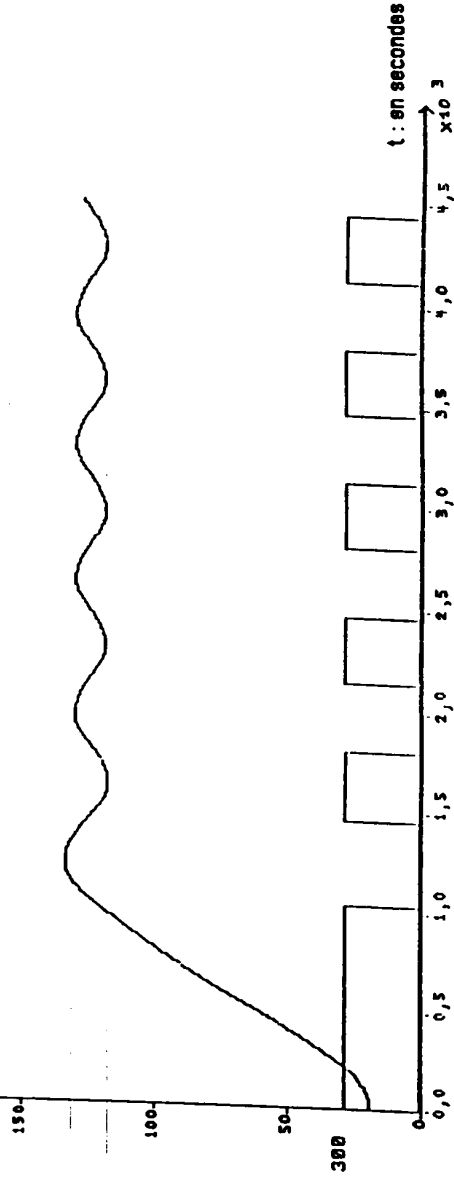


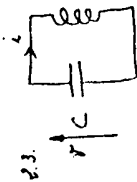
Figure 12

1.  $W_0 = \frac{1}{2} CE^2$ : énergie emmagasinée dans C.

2.1.  $v(0^+) = E$ ;  $i(0^+) = 0$

2.2. Il n'y a pas de pertes d'énergie, la somme  $\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cv^2$  est donc constante. Sa convergence i est maximale lorsque  $v=0$ :  $\frac{1}{2} Li_{max}^2 = \frac{1}{2} CE^2$ .

$$I_{max} = E \sqrt{\frac{C}{L}}$$

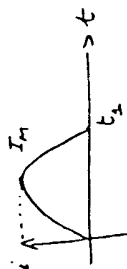


2.3.  $v = L \frac{di}{dt}$ ;  $i = -C \frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{i}{C} = L \frac{d^2i}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

2.4.  $i = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$

pour  $t=0$   $i=0 \Rightarrow i = A \sin \omega_0 t$ ;  $i_{max} = I_{max} \Rightarrow i = I_{max} \sin \omega_0 t$



2.5.  $t_2 = \frac{\pi}{\omega_0}$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow t_2 = \pi \sqrt{LC}$

$\frac{di}{dt} = \frac{v}{L}$ ; pour  $t=t_2$ :  $i=0$ , l'inductif est de manière extrême dans son état électrostatique  $v(t_2) = -E \Rightarrow t = \frac{E}{L}$

$$I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{E \sqrt{\frac{C}{L}}}{\sqrt{2}}$$

2.6. Application numérique:  $I_{max} = 30 \text{ A}$ ;  $t = 30 \times 10^{-6} \text{ A/s} = 3 \text{ A/ms}$ ;  $t_2 = 3,14 \text{ ms}$

3.1.  $W_{\frac{1}{2}} = A I^2 t_2 = \lambda \frac{E^2 C \pi \sqrt{LC}}{2L} = W_0 \cdot \pi \sqrt{LC} \cdot \frac{1}{2L}$

$$W_{\frac{1}{2}} = W_0 \frac{\pi \lambda}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Application numérique:  $\pi \lambda_{max} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ;  $\lambda_{max} = 9,38 \Omega$

3.2.  $W_{\frac{1}{2}} = \int_0^{t_2} v i dt = V_0 \int_0^{t_2} i dt = V_0 \int_0^{t_2} I_{max} \sin(\omega_0 t) dt$

$$W_{\frac{1}{2}} = \frac{2V_0 I_{max}}{\omega_0} = 2V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} E \sqrt{LC} = 2V_0 CE = \frac{1}{2} CE^2 \cdot \frac{4V_0}{E}$$

$$W_{\frac{1}{2}} = W_0 \frac{4V_0}{E}$$

Application numérique:  $\frac{W_{\frac{1}{2}}}{W_0} = \frac{4}{10} = \frac{4V_0}{E_{max}} \Rightarrow E_{min} = 20V$

3.3. A l'instant  $t_2$   $W = W_0 - W_{\frac{1}{2}} - W_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} C v_2^2$  puisque  $i=0$ .

$$\frac{1}{2} C v_2^2 = \frac{1}{2} CE^2 \left( 1 - \frac{\pi \lambda}{\sqrt{\frac{L}{C}}} - \frac{4V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|v_2| = E \left[ 1 - \left( \frac{\pi \lambda}{\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{4V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right]; \text{ pour } x = \left( \frac{\pi \lambda}{\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{4V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'après la formule  $(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2}$

$$|v_2| = E \left[ 1 - \frac{\pi \lambda}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} - \frac{4V_0}{E} \right]$$

2.6.  $v = L \frac{di}{dt} + iR + V_0$ ; pour  $t = \frac{t_2}{2}$ :  $i=0$ ,  $v = v_2$

$$v_2 = L \frac{di}{dt} + V_0; \quad v_2 \text{ et } L \frac{di}{dt} \text{ sont opposés}$$

$$|v_2| = -v_2 = -L \left( \frac{di}{dt} \right)^{\frac{1}{2} t_2} - V_0 = L \left( \frac{1}{2} - \frac{V_0}{E} \right)$$

$$t_c = \frac{|v_2| + V_0}{L}$$

Application numérique:  $|v_2| = 30 \left[ 1 - 0,05 \cdot \frac{92}{\lambda_{max}} - 0,05 \cdot \frac{E_{min}}{30} \right] = 28,1V$   
 $t_c = 2,86 \mu s$

1. Le principe de la figure 3 à la figure 4 est une conséquence de l'application de Théorème de Thévenin.

$$E^+ = V_{0f} \frac{R_{T1}}{R_{T1} + R_2} = V_{0f} \frac{1 + \alpha \theta}{10 + \alpha \theta} = V_{0f} \frac{1 + \alpha \theta}{10(1 + \frac{\alpha \theta}{10})}$$

Par application de la dernière formule appliquée au début du test

$$E^+ = V_{0f} \frac{(1 + \alpha \theta)(1 - \frac{\alpha \theta}{10})}{10} = \frac{V_{0f}}{10} (1 + 0,9 \alpha \theta), \text{ à } 0^\circ \text{C: } E^+ = \frac{V_{0f}}{10}$$

$$h = \frac{1}{10}, \alpha' = 0,9 \alpha.$$

$$E^- = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{0f} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{0f} = \left| \frac{V_{0f}}{8} \right|$$

$$R_2^- = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \left| \frac{7 R_3}{8} \right|$$

$$1.2. \left[ v_s = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) E^+ - \frac{R_4}{R_2^-} E^- \right]$$

expression obtenue en calculant  $v_s$  en fonction de  $E^+$  et de  $v_s$  et en

éjectant  $v_s$  et  $v_s = E^+$ .

$$1.3. \text{ A } 0^\circ \text{C}, E^+ = \frac{V_{0f}}{10}, \text{ et l'on a } E^- = \frac{V_{0f}}{8}.$$

$$\text{Pour avoir } v_s(0^\circ \text{C}) = 0, \text{ il faut } \left[ \frac{R_3}{R_2} = 6 \right]$$

$$\text{Comme } R_2^- = \frac{7 R_3}{8}, \text{ on en déduit } \left[ \frac{R_3}{R_3} = \frac{7}{2} = 3,5 \right]$$

$$1.4. h \theta = 100^\circ \text{C}, E^+ = 0,1002 V_{0f}.$$

$$v_s(100^\circ \text{C}) = 5,01002 V_{0f} - 0,125 \times 6 V_{0f} = V_{0f} \times 0,351 = 10V.$$

$$V_{0f} = 28,5 V.$$

2. Modèle thermique.

2.1.  $R_{th1}$  est la résistance thermique entre la résistance chauffante et le plateau de chauffe;  $R_{th2}$  est la résistance thermique entre le plateau de chauffe et le milieu ambiant.

$C_2$  est la capacité thermique de la plaque de chauffe.

$$2.2. \dot{T}_3 = \dot{T}_2 + \dot{T}_3 \quad ; \quad \text{neud}$$

$$\theta_1 - \theta_2 = R_{th1} \dot{T}_2 \quad \dot{T}_2' = C_2 \frac{d(\theta_2 - \theta_0)}{dt}$$

$$\theta_2 - \theta_3 = R_{th2} \dot{T}_3$$

$$\theta_2 - \theta_0 = R_{th2} \dot{T}_2' + C_3 \frac{d(\theta_3 - \theta_0)}{dt}$$

$$2.3. I = I_2 + I_3$$

$$I_2 = \frac{T_2}{R_{th2}} + C_2 \dot{T}_2 = \frac{(1 + \frac{1}{2} \alpha t) T_0}{R_{th2}}$$

$$I_3 = \frac{(1 + \frac{1}{2} \alpha t) T_3}{R_{th3}}$$

$$I = \frac{(1 + \frac{1}{2} \alpha t) T_2}{R_{th2}} + \frac{1 + \frac{1}{2} \alpha t}{R_{th3}} T_3$$

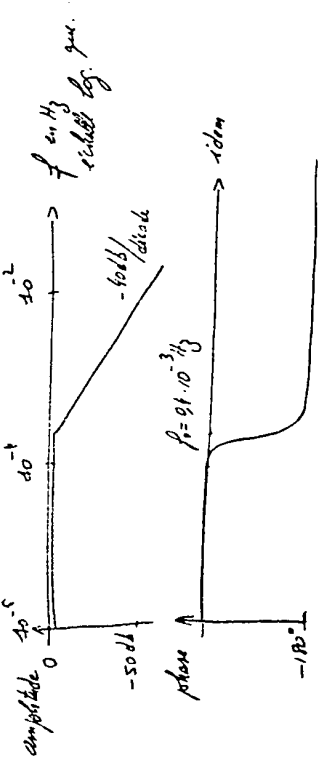
$$\frac{T_2 - T_3}{R_{th2}} = I_3 = \frac{1 + \frac{1}{2} \alpha t}{R_{th3}} T_3$$

$$T_2 = T_3 + \frac{R_{th2}}{R_{th3}} (1 + \frac{1}{2} \alpha t) T_3$$

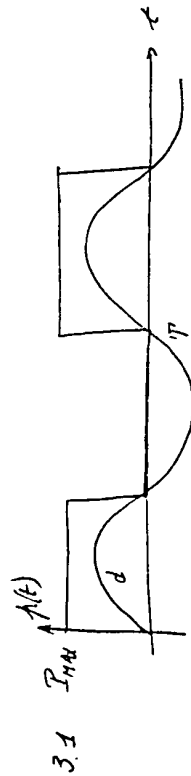


2.1.  $H(\omega) = \frac{9727}{\frac{1}{\omega_0^2} + 2m \frac{1}{\omega_0} + 1}$

$H(j\omega) = 9727$  pour  $\omega = 0$   
 $m = 1/64 \rightarrow$  la résonance est très peu marquée.



2.5.  $I_m = \delta I_{max}$   
 $(\theta_3 - \theta_1)_{avg} = H_0 I_m = H_0 \delta I_{max} = 105^\circ C$   
 $\delta = \frac{105}{9727 \times 8000} = 948$



3.2.  $I_{311} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin \omega t dt$  d'après la formule de Fourier.  
 pour  $x = \omega t$  :  $I_{311} = \frac{2}{\omega \pi} \int_0^\pi f(x) \sin x dx = \frac{I_{max}}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx$

$I_{311} = \frac{2 I_{max}}{\pi}$

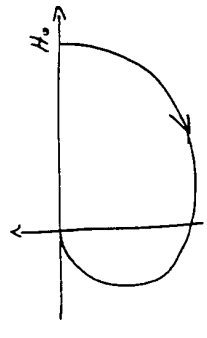
$f(t)$  étant une fonction paire, ne contient que des termes, si  $d = D_m \sin \omega t$ ,  $f_3(t) = I_{311} \sin \omega t$ , on trouve avec d(B).

3.3.  $A_1 = \frac{I_1}{D} = \frac{2 I_{max}}{\pi D_m}$  ;  $\frac{1}{A_1} = \frac{\pi D_m}{2 I_{max}}$   
 1.1.  $\frac{D_3}{A_2} = \frac{A_1 H}{1 + A_2 H}$

1.2. Condition d'oscillation :  $H(j\omega_{osc}) = -\frac{1}{A_2}$

de tracé du diagramme de Nyquist de  $H(j\omega)$ , avec

$H = \frac{H_0}{1 + 9j m \frac{\omega}{\omega_0} + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$



neutre pour  $H$  n'est jamais égal à un nombre réel négatif ( $-\frac{1}{A_2}$ ). Il ne peut donc y avoir d'oscillation avec ce modèle.

4.3. L'argument de  $H$  vaut  $180^\circ$  pour  $f_{osc} \approx 15 \cdot 10^{-3} Hz$ .

Pour cette fréquence, le gain vaut  $= -32 dB$ , donc  $|H| = 25 \cdot 10^{-2}$ .

$\frac{1}{A_1} = 25 \cdot 10^{-2} = \frac{\pi D_m}{2 I_{max}} \Rightarrow D_m = \frac{25 \cdot 10^{-2} \times 2 \times 800}{\pi}$

$D_m = 68^\circ C$ . (graphiquement 5%)