ELECTRONIQUE ET MATHEMATIQUES

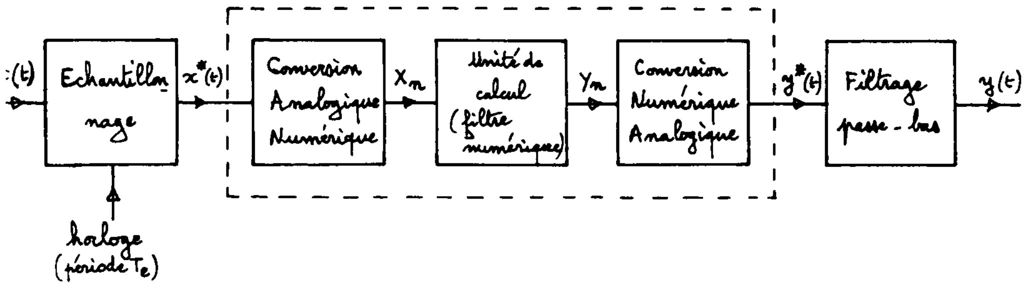
Deuxième partie

Durée : 2 h 30 + 30 min de lecture du sujet

Aucun document n'est autorisé

ETUDE D'UN SYSTEME DE FILTRAGE NUMERIQUE

Un système de filtrage numérique, opérant sur un signal analogique x(t) se ramène au schéma fonctionnel suivant :



– L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs du signal x(t) à des instants multiples entiers de la période d'horloge. Soit $x(nT_e)$, la valeur analogique de l'échantillon pris à l'instant $t = nT_e$. L'ensemble de ces échantillons constitue le signel x*(t).

– Chaque échantillon est ensuite traduit dans une représentation numérique adaptée à l'unité de calcul. On notera X_n le nombre binaire associé à la valeur analogique $x(nT_e)$.

– L'unité de calcul effectue un algorithme qui, à partir de la suite des nombres X_n (définis précédemment) crée une suite de nouveaux nombres appelés Y_n.

– Ces nombres Y_n, convertis en grandeur analogique, permettent de définir le signal y*(t) formé des échantillons $y(nT_e)$.

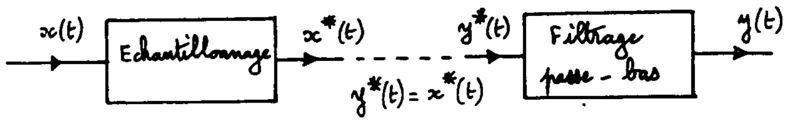
– Après filtrage passe-bas du signal y*(t), on obtient le signal analogique de sortie y(t).

Le but du problème est d'étudier les caractéristiques de y(t) sachant que x(t) est un signal analogique sinusoïdal.

$$x(t) = X \sin \omega t = X \sin(2 \pi f t)$$

I - ETUDE DU SYSTEME DANS LE CAS OU L'UNITE DE CALCUL EFFECTUE L'ALGORITHME $Y_n = X_n$:

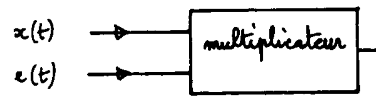
Le traitement numérique étant réduit à l'égalité $Y_n = X_n$, le schéma fonctionnel est alors le suivant :



Grâce à cette structure simplifiée, ne restent à analyser que les fonctions échantillonnage et filtrage passe-bas.

I-1 - Echantillonnage :

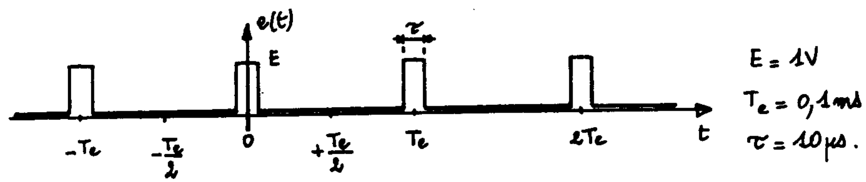
La prise d'échantillons est réalisée selon le principe suivant.



$x^*(t) = kx(t) \times e(t)$

avec $k = 1 V^{-1}$

Le signal x(t) est sinusoïdal, d'amplitude X = 2V et de fréquence f = 833 Hz. e(t) est le signal d'échantillonnage de période $T_e = \frac{1}{F_e}$ défini par :



1-a : Représenter, sur une feuille ci-jointe (où figure x(t)) les signaux e(t) et x*(t) (en respectant la concordance des temps).

1-b : e(t) est un signal périodique, et est décomposable en série de Fourier.

– Justifier qualitativement que e(t) peut s'écrire :

$$e(t) = E_o + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos n\,\omega_e t. \qquad \omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$$

– Trouver l'expression littérale de E_o puis calculer sa valeur numérique.

1-c : Connaissant la décomposition de e(t), exprimer $x^*(t)$ sous forme d'une somme de fonctions sinusoïdales.

1-d : En se limitant aux trois premières raies et sachant que $E_1 = 0{,}2$ V, représenter le spectre en fréquence de $x^*(t)$.

I-2 - Filtrage passe-bas :

Sachant que $y^*(t) = x^*(t)$, on souhaite obtenir y(t) image parfaite de x(t), soit :

$$y(t) = Y \sin \omega t = k X \sin \omega t.$$

Pour ne conserver que la raie de fréquence f, on réalise un filtrage passe-bas.

2-a : En raisonnant sur un filtre passe-bas idéal, trouver, en fonction de f, la valeur minimale de la fréquence F_e d'échantillonnage.

2-b : Une première approche de ce filtre consiste à utiliser un circuit passe-bas du 1er ordre de fréquence de coupure f_c.

– Donner la transmittance d'un tel filtre. Tracer son diagramme de Bode (diagrammes asymptotiques et courbes réelles des courbes de gain et de phase).

– Comment choisir f_c par rapport à $f_1 = 833$ Hz ? Justifier l'inégalité proposée.

Comment choisir f_c par rapport à $f_2 = 9167$ Hz (et $f_3 = 10833$ Hz) ? Justifier l'inégalité proposée.

Ces deux inégalités sont-elles compatibles ? Conclure sur l'utilisation d'un tel filtre. Quelle(s) solution(s) suggérez-vous ?

Dans la suite du problème, le filtre passe-bas sera supposé idéal. Dans le cas particulier où l'algorithme est l'égalité $Y_n = X_n$, la sortie y(t) est donc rigoureusement proportionnelle à l'entrée x(t). La deuxième partie du problème met en évidence les modifications sur y(t) apportées par l'exécution d'un algorithme différent.

II - ETUDE DU SYSTEME DANS LE CAS OU L'UNITE DE CALCUL EFFECTUE L'ALGORITHME $Y_n = \frac{X_n + X_{n-1}}{2}$

On rappelle que X_n est le nombre binaire associé à la valeur de $x(t) = X \sin \omega t$ prise à l'instant particulier $t = n\,T_e$.

$$X_n \longleftrightarrow x(n\,T_e) = X \sin(n\,\omega\,T_e)$$

Dès l'apparition du nombre X_n à l'instant $t = n\,T_e$, le calculateur fournit immédiatement le nombre $Y_n = \frac{X_n + X_{n-1}}{2}$. La conversion du nombre Y_n en la grandeur analogique $y(nT_e)$ est instantanée.

II-1 : Etablir l'expression de $y(nT_e)$. Montrer que celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$y(nT_e) = Y \sin[n\omega T_e + \varphi]$$

Donner les expressions littérales de Y et φ en fonction de X, f et F_e.

II-2 : L'échantillonnage de $x(t) = X \sin \omega t$ (X = 2V, f = 833 Hz) à lieu comme indiqué dans la première partie, aux instants --- O, T_e, $2T_e$ --- nT_e --- pendant un temps τ considéré très court devant T_e ($T_e = 0{,}1$ ms). Dans ces conditions, on admet que x(t) est constant et égal à $x(nT_e)$ sur l'intervalle $[\,nT_e - \frac{\tau}{2}, nT_e + \frac{\tau}{2}\,]$.

2-a : Calculer les valeurs de $y(nT_e)$ pour n variant de 0 à 6.

2-b : En extrapolant les résultats ci-dessus, représenter sur la feuille jointe, $y^*(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1{,}2$ ms.

2-c : La reconstitution du signal analogique y(t) à partir du signal $y^*(t)$ formé des échantillons $y(nT_e)$ étant idéale, montrer qualitativement ou graphiquement que :

$$y(t) = X \cos\left(\pi \frac{f}{Fe}\right) \sin\left(\omega t - \pi \frac{f}{Fe}\right)$$

En déduire la modification produite sur x(t) par le filtrage numérique.

II-3 . x(t) est maintenant un signal sinusoïdal d'amplitude constante et de fréquence variant de 0 à $\frac{Fe}{2}$:

3-a : Justifier la valeur limite $f_{max} = \frac{Fe}{2}$

3-b : Réponse en fréquence du filtre numérique

– représenter, en échelle linéaire, l'évolution de $T = \frac{Y}{X}$, et de φ pour f variant de

O à f_{max} (on calculera T pour les fréquences particulières : $0, \frac{Fe}{10}, \frac{Fe}{5}, \frac{Fe}{4}, \frac{Fe}{3}, \frac{Fe}{2}$)

(utiliser la feuille jointe).

– Quelle est la bande passante à –3 dB ?

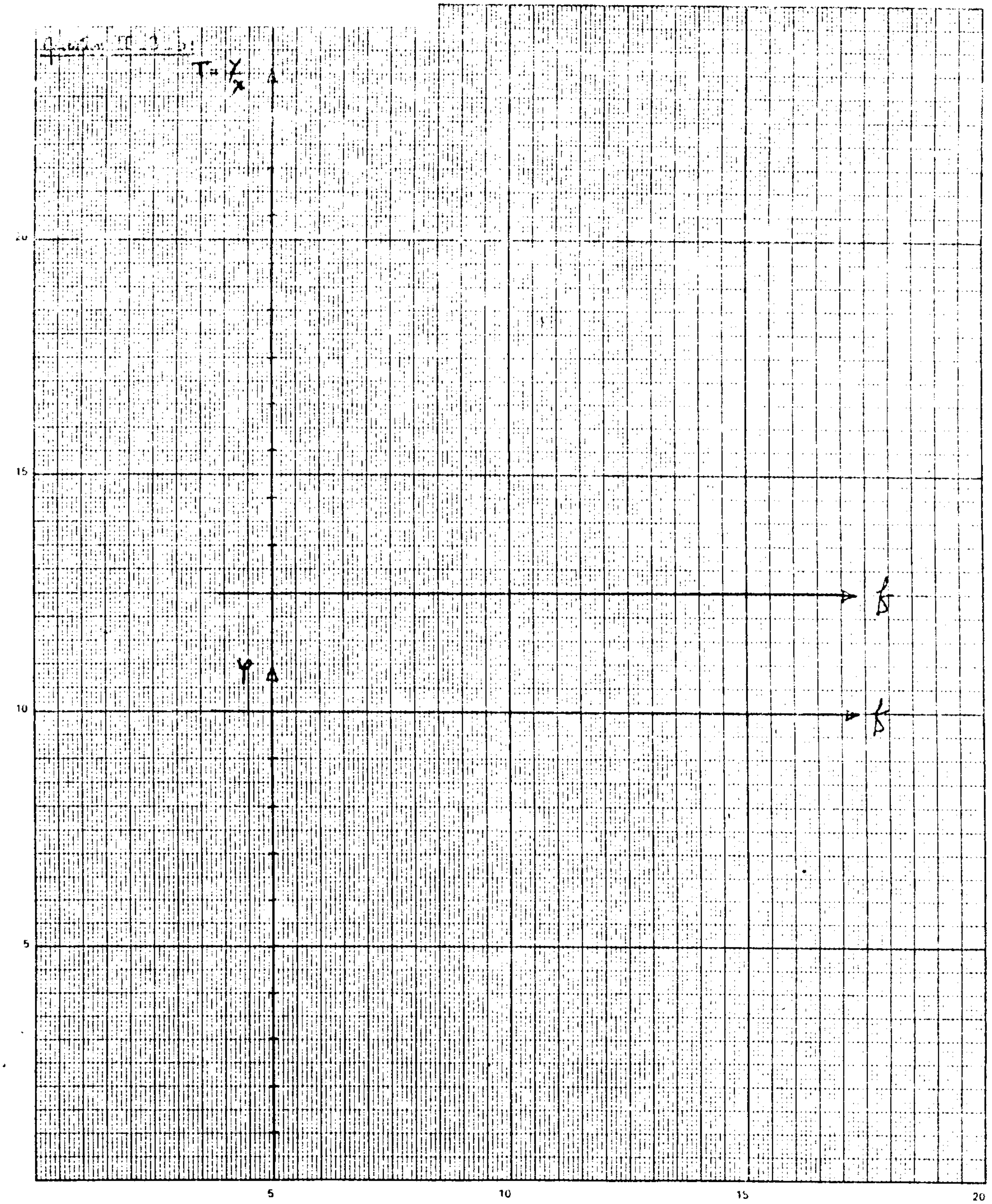
– Pour des signaux dont le spectre en fréquence s'étend de O à $\frac{Fe}{10}$, quelle est la fonction réalisée par le filtre numérique ?

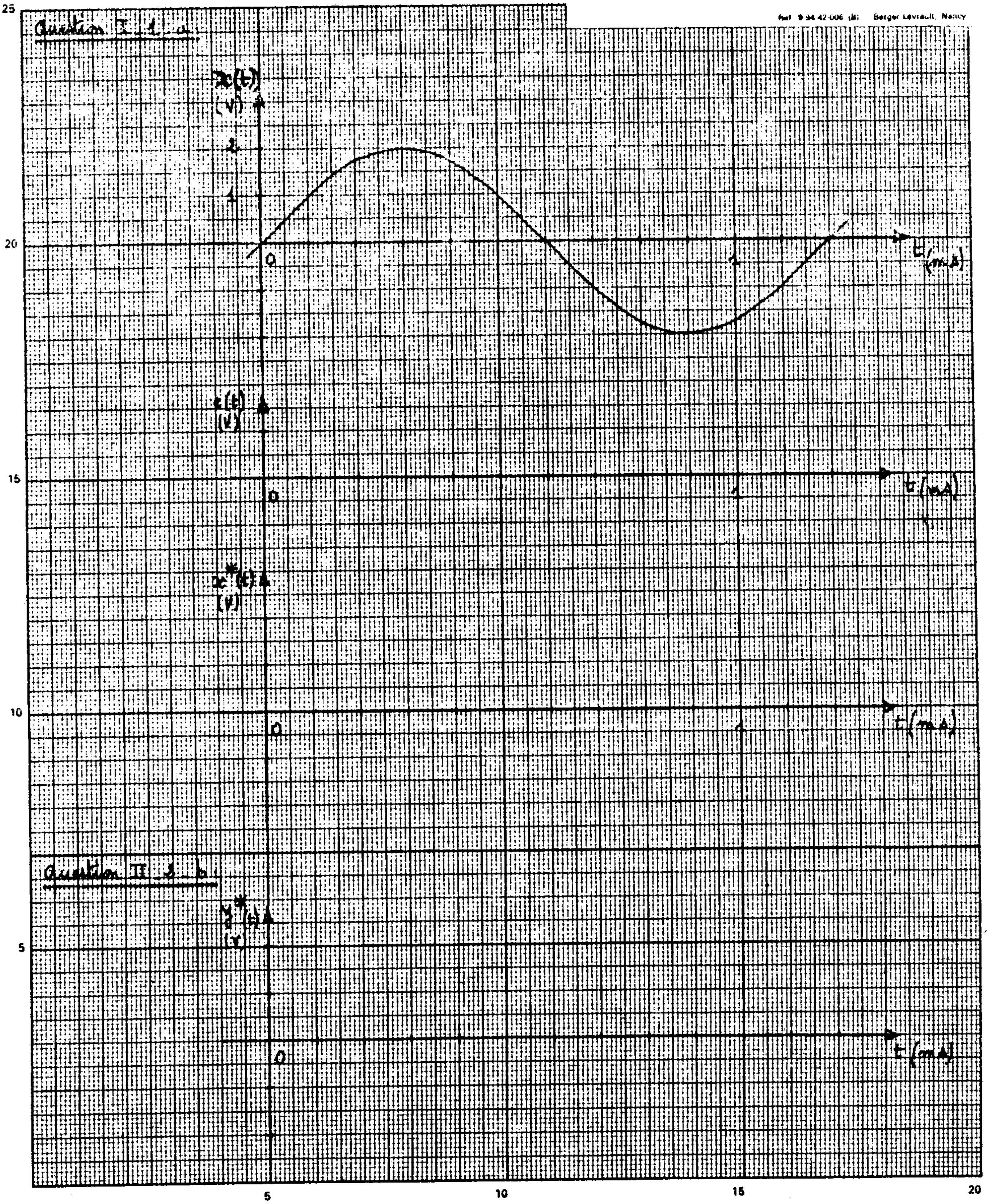
On rappelle les transformations trigonométriques :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \times \cos \frac{a-b}{2}$$

Question III-2-b:





Question I.1.a
x(t) (V)
2
1
0
1
t (ms)
e(t) (V)
0
1
t (ms)
x*(t) (V)
0
1
t (ms)
Question II.2.b
$y_d^*(t)$ (V)
0
t (ms)
25
20
15
10
5
5
10
15
20

Filtrage numérique – Corrigé.

1.b) La fonction $e(t)$ est paire, son développement ne contient donc que des termes en cosinus $\rightarrow e(t) = E_0 + \sum E_n \cos n\omega_e t$

E_0 est la valeur moyenne de $e(t)$

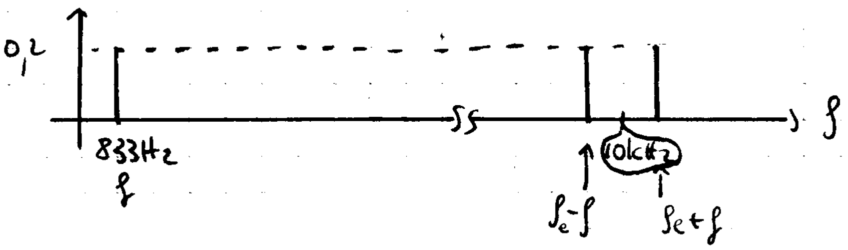
$$E_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} e(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e(t)\,dt = E\,\frac{\tau}{T_e} = \boxed{0{,}1\,V}$$

1 c) $x^*(t) = k\,e(t)\,x(t) = kX\sin(\omega t)\cdot\left(E_0 + \sum E_n\cos(n\omega_e t)\right)$

$$= kE_0X\sin\omega t + \sum kE_nX\sin(n\omega t)\cos(n\omega_e t)$$

$$= kE_0X\sin\omega t + \sum\left[\frac{kE_nX}{2}\left(\sin(n\omega_e+\omega)t - \sin(n\omega_e-\omega)t\right)\right]$$

$$= kE_0X\sin\omega t + \frac{kE_1X}{2}\sin(n\omega_e+\omega)t \mp \frac{kE_1X}{2}\sin(n\omega_e\mp\omega)t + \dots$$



2 a) voir cours $\quad F_e \geq 2f \quad$ Théorème de Shannon

b) voir cours (Syst. du 1er ordre)

Le filtre doit laisser passer la raie à 833Hz $\rightarrow f_c > 833\,Hz$

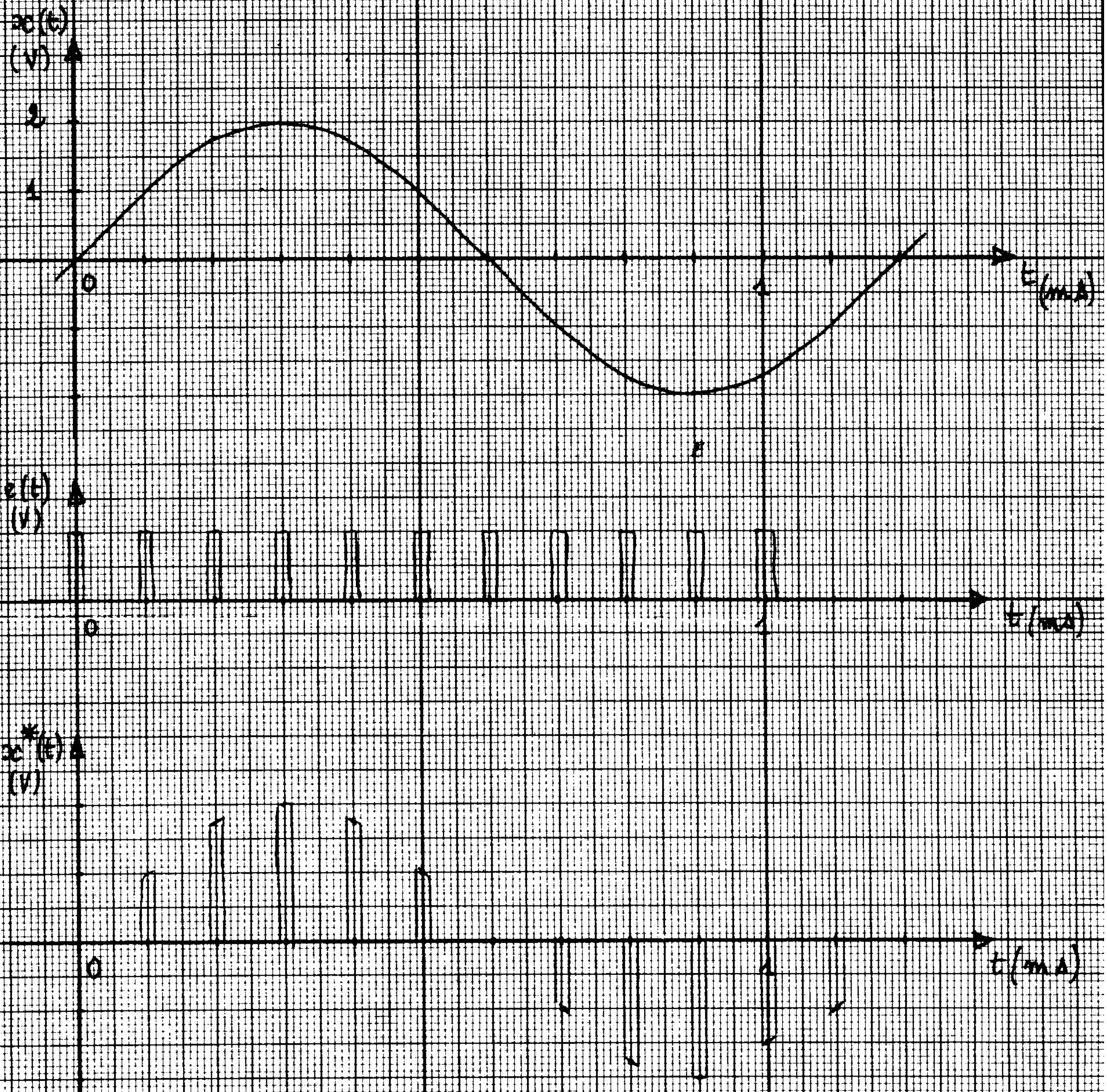
Le filtre doit atténuer les raies à $\begin{cases} f_e - f = 9167\,Hz \rightarrow f_c \ll f_2 \\ f_e + f = 10833\,Hz \rightarrow f_c \ll f_3 \end{cases}$

__Ex:__ si les raies à f_2 et f_3 doivent être divisées par 100 (−40 dB) on doit avoir $f_c \approx 100\,Hz$, incompatible avec $f_c > 833\,Hz$

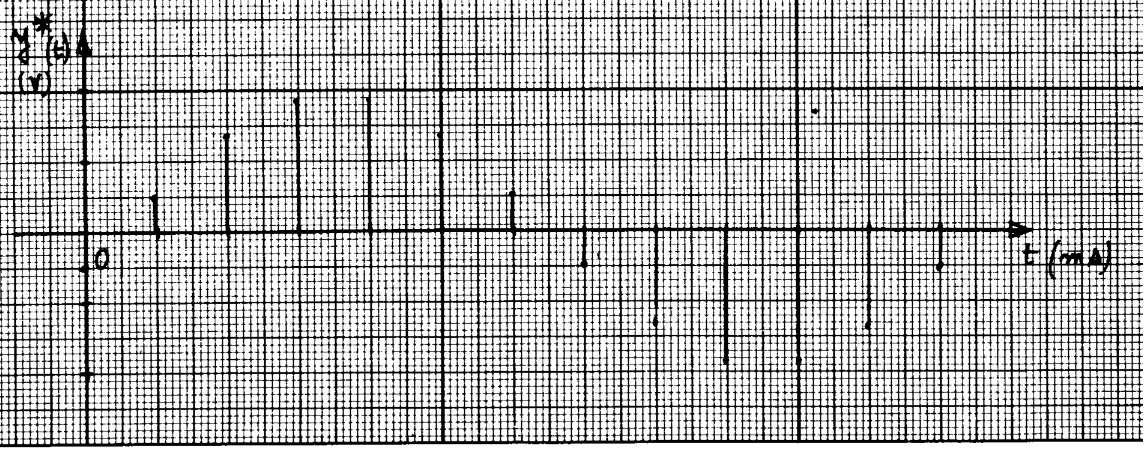
__Solution__ : utiliser un filtre de pente + raide (2ème ordre ou plus)

Réf. 9-94-42-006 (B). - Berger-Levrault, Nancy.

Question I 1 a.



Question II 3 b.



Question II-3-b: